مواد عامة

رياضيات

Mathematics

الصف الثاني

العام التدريبي (٢٠١٩ / ٢٠٢٠)

الفهرس

المقدمة

عزيزي الطالب، بين يديك كتاب "رياضيات ٢" وهو الجزء الثاني من منهج الرياضيات الذي سوف تدرسه خلال فترة دراستك بالمدرسة، وهو مكون من خمسة أبواب، فنبدأ بالباب الأول "الجذور" ويشمل تعريف الجذور والجذر التربيعي والعمليات الأساسية عليه، يتبعه الباب الثاني ويحتوي على طرق حل المعادلات من الدرجة الثانية. الباب الثالث يقدم مفهوم الدالة ومنحناها، بينما يقدم الباب الرابع مدخلا إلى علم حساب المثلثات. وأخيرا الباب الخامس يقدم شرحا مبسطا للدالة ومجالها والنهايات منتهيا بالاشتقاق وأساسيات علم التفاضل.

وبالتالي فإن الكتاب ملم بمعظم المعارف والنظريات التي سوف تساعدك على إتمام دراستك في باقي العلوم التطبيقية وفي ضوء ما سبق قد رعي في الكتاب أن يكون ذو أسلوب بسيط لضمان وصول المعلومة بطريقة سهلة وسريعة، وأن يشتمل على أمثلة متدرجة في الصعوبة تمثل مستويات التفكير المتنوعة مع تدريبات وأسئلة ينتهي بها كل درس.

أخيرا ... نتمنى لك عزيزي الطالب كل النجاح والتفوق في حياتك الدراسية والعملية

فريق التأليف والمراجعة

شركة يات لحلول التعليم

الباب الأول: الجذور

مقدمة:

حيث: $b\sqrt[m]{a^{n}}$

- إشارة الجذر = $\sqrt{\ }$
- معامل الجذر = b

درجة الجذر = m وتساوي ٢ في حالة الجذر التربيعي ولا تكتب

- ما تحت الجذر = a
- مأس تحت الجذر = n

اشتقت إشارة الجذر التربيعي، على ما يبدو، من الحرف الأول للكلمة radix (جذر باللغة اللاتينية).
أدخل المصطلح "جذر" (اللاتينية radix) لأول مرة إلى الغرب بواسطة الرياضي ليوناردو من بيزا (Leonardo of Pisa) قبل حوالي 800 سنة عندما ترجم كتب رياضية عربية.
استعمل الرياضي رودولف (Rudolff) إشارة الجذر أول مرة في كتابه الذي نشره سنة 1525، وقد استعمل هذه الإشارة دون "السقف ‎√.‎ "فيما بعد أضاف الرياضي دكارت – Decartes R.,1650) 1596) إشارة "السقف".

ونتجت الإشارة التي نستعملها اليوم $\sqrt{\ }$

ما أهمية "السقف"، حسب رأيكم، في إشارة الجذر التربيعي؟

تشير مكتشفات علم الآثار التي تم الحفاظ عليها حتى اليوم إلى أن البابليين والمصريين نفذوا، قبل حوالي 3,500 سنة، حسابات لإيجاد جذور تربيعية لأعداد معينة. منذ ذلك الحين، استمر رياضيون، في أماكن مختلفة في العالم (الهند، الصين وأوروبا في مرحلة متأخرة)، في استعمال التقريب، وحتى إيجاد طرق منهجية لحساب الجذور التربيعية.

الجذر التربيعي لعدد موجب

تعريف

ليكن a عددا حقيقيا موجبا، العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه a يسمى الجذر التربيعي للعدد a ويرمز له بـــ $\sqrt{a}$ ويقرأ الجذر التربيعي للعدد a بحيث :

$$\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

$\sqrt{a}$ تكون لها معنى إذا كان a عدد حقيقي غير سالب.

نقول أن b بحيث $b \geq 0$ هو الجذر التربيعي للعدد a إذا كان $b^2 = a$

مثال ١:

٦ هو الجذر التربيعي للعدد ٣٦ لأن إذا كان $6^2 = 36$ ولدينا $(-6)^2 = 36$ إلا أن -6 ليست جذر تربيعي لـــ ٣٦ لأنها سالبة.

- إذا كان $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ فإن $\left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2$ و بالتالي $a = b$.
- $\sqrt{x} = (x)^{\frac{1}{2}}$.

مثال ٢:

أوجد قيمة الجذر الآتي:

$$\sqrt{81} = (81)^{\frac{1}{2}} = (9^2)^{\frac{1}{2}} = 9^{2\times\frac{1}{2}} = 9$$

أمثلة: أوجد قيمة الجذور الآتية:

$\sqrt{0} = 0 \quad ; \quad \sqrt{1} = 1 \quad ; \quad \sqrt{2} = 1.41 \quad ; \quad \sqrt{3} = 1.73 \quad ;$

$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$

$-\sqrt{0.49} = -\sqrt{0.7^2} = -0.7 \quad ; \quad \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5 \quad ;$

$\sqrt{1.44} = \sqrt{1.2^2} = 1.2$

$\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10 \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{\sqrt{9^2}} = \frac{1}{9} \quad ; \quad \frac{\sqrt{25}}{3} = \frac{\sqrt{5^2}}{3} = \frac{5}{3} \quad ;$

$\sqrt{\frac{25}{100}} = \sqrt{\left(\frac{5}{10}\right)^2} = \frac{5}{10} \quad ; \quad \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{\sqrt{9^2}} = \sqrt{9} = 3$

انتبه:

- $\sqrt{-5}$ لا معنى لها لأن ما بداخل الجذر يجب أن يكون موجبا.
- $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{7^2} = 7$ لأن الأس زوجي وبالتالي $(-7)^2 = -7 \times -7 = 49 = 7^2$
- $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$ $\left(-\sqrt{7}\right)^2 = -\sqrt{7} \times -\sqrt{7} = $ و $-\sqrt{7}^2 = -7$

لاختصار وتبسيط الجذر لابد من تحويل الجذر للصورة الأسية أي أن:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

مثال ٣:

أوجد قيمة الجذور الآتية:

$$\sqrt{3^8} = 3^{\frac{8}{2}} = 3^4 = 81$$

$$\sqrt{4 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{و} \quad (2\sqrt{5})^2 = 2^2 \times \sqrt{5}^2 = 4 \times 5 = 20$$

العمليات على الجذور التربيعية

خاصية ١

a, b, c, d أعداد حقيقية موجبة: $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$$\sqrt{a \times b \times c \times d} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} \times \sqrt{d}$$

أمثلة: أوجد قيمة الجذور الآتية:

$$\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$$

$$\sqrt{9 \times 4} = \sqrt{9} \times \sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{6} = \sqrt{3 \times 2 \times 6} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{900} = \sqrt{9 \times 100} = \sqrt{9} \times \sqrt{100} = 3 \times 10 = 30$$

$$\sqrt{4900} = \sqrt{49 \times 100} = \sqrt{49} \times \sqrt{100} = 7 \times 10 = 70$$

خاصية ٢

إذا كان a, b عدادان حقيقيان موجبان: $\sqrt{a^2 \times b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$

أمثلة: أوجد قيمة الجذور الآتية:

$$-\sqrt{45} = -\sqrt{9 \times 5} = -\sqrt{9} \times \sqrt{5} = -3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{5^2 \times 2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{20} = 3 \times \sqrt{4 \times 5} = 3 \times 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$\sqrt{5^2 \times 2^2 \times 3} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} = 5 \times 2 \times \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\sqrt{180} = \sqrt{9 \times 20} = \sqrt{9 \times 4 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 3 \times 2 \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

انتبه:

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a}-\sqrt{b}$

$\sqrt{a}\times b \neq \sqrt{a\times b}$

$\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}-\sqrt{7}=\left(\sqrt{3}\right)^4-\sqrt{7}=3^{\frac{4}{2}}-\sqrt{7}=3^2-\sqrt{7}=9-\sqrt{7}$

$\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{7}=4\sqrt{3}-\sqrt{7}$

$\sqrt{5}\times 2\times\sqrt{3}=2\times\sqrt{5\times 3}=2\sqrt{15}$

$\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=2\sqrt{3}+\sqrt{5}$

$\sqrt{25}+\sqrt{9}=5+3=8$

$\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$\sqrt{7}\times\sqrt{2}-\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{7\times 2}-\sqrt{3\times 12}=\sqrt{14}-\sqrt{36}=\sqrt{14}-6$

خاصية ٣

إذا كان a, b عدادان حقيقيان موجبان و $b \neq 0$: $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

أمثلة: أوجد قيمة الجذور الآتية:

$$\frac{-\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=-\sqrt{\frac{12}{3}}=-\sqrt{4}=-2$$

$$2\sqrt{\frac{5}{4}}=2\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}=2\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$

$$\frac{\sqrt{55}}{\sqrt{45}}=\sqrt{\frac{55}{45}}=\sqrt{\frac{5\times 11}{5\times 9}}=\sqrt{\frac{11}{9}}=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{11}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{35}}=\sqrt{\frac{500}{35}}=\sqrt{\frac{5\times 100}{5\times 7}}=\sqrt{\frac{100}{7}}=\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{7}}=\frac{10}{\sqrt{7}}$$

حذف الجذر من المقام

المقام لا يحتوي على مجموع أو فرق:

إذا كان a, b عدادان حقيقيان موجبان و $b \neq 0$: $\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a}{\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$

أمثلة: احذف الجذر من المقام للكسور الآتية:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{-5}{\sqrt{5}}=\frac{-5}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{-5\sqrt{5}}{\sqrt{25}}=\frac{-5\sqrt{5}}{5}=-\sqrt{5}$$

$$\frac{-2}{5\sqrt{3}}=\frac{-2}{5\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{5\sqrt{9}}=\frac{-2\sqrt{3}}{5\times 3}=\frac{-2\sqrt{3}}{15}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{3\times 5}}{\sqrt{25}}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-2)}{5}$$

$$\frac{3+\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}(3+\sqrt{2})}{4\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{5}(3+\sqrt{2})}{4\times 5}=\frac{\sqrt{5}(3+\sqrt{2})}{20}$$

المقام يحتوي على مجموع أو فرق:

مفهوم المرافق:

مرافق $a+b$ هو $a-b$	مرافق $-a+b$ هو $-a-b$
مرافق $a-b$ هو $a+b$	مرافق $-a-b$ هو $-a+b$

أمثلة: أوجد حاصل ضرب العدد $a \times b$:

العدد a	العدد b	حاصل ضرب العدد $a \times b$
$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-\sqrt{3}^2=4-3=1$
$5-\sqrt{5}$	$5+\sqrt{5}$	$(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})=5^2-\sqrt{5}^2=25-5=20$
$-3+\sqrt{2}$	$-3-\sqrt{2}$	$(-3+\sqrt{2})(-3-\sqrt{2})=(-3)^2-\sqrt{2}^2=9-2=7$
$\sqrt{5}+\sqrt{2}$	$\sqrt{5}-\sqrt{2}$	$(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})=\sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2=5-2=3$
$-2\sqrt{3}+4$	$-2\sqrt{3}-4$	$(-2\sqrt{3}+4)(-2\sqrt{3}-4)=(-2\sqrt{3})^2-4^2=12-16=-4$

إذا كان a, b عدادان حقيقيان موجبان قطعا و c عدد حقيقي :

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

أمثلة: احذف الجذر من المقام للكسور الآتية:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{1(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1}=$$

$$=-(\sqrt{2}-\sqrt{3})=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{\sqrt{7}^2-\sqrt{6}^2}=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{7-6}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{1}=2\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{6})$$

$$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2}=\frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{7-5}=\frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{2}$$

$$=(\sqrt{7}+\sqrt{5})$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}{\sqrt{2}^2-\sqrt{5}^2}=\frac{\sqrt{2}^2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}+\sqrt{5}^2}{2-5}$$

$$=\frac{2-2\times\sqrt{2\times5}+5}{-3}=$$

$$=-\frac{7-2\sqrt{10}}{3}$$

حل المعادلة $a = x^2$ في $\mathcal{R}$ (مجموعة الأعداد الحقيقية)

الحالة الأولى : $x^2 = a$ بحيث $a = 0$ المعادلة تقبل حلا وحيدا هو $x = 0$

حل في $\mathcal{R}$ المعادلة : $2(x^2+3)=6$

$$2(x^2+3)=6 \Leftrightarrow x^2+3=\frac{6}{2} \Leftrightarrow x^2+3=3 \Leftrightarrow x^2=3-3 \Leftrightarrow x^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

إذن المعادلة تقبل حلا وحيدا هو ٠.

الحالة الثانية : $x^2 = a$ بحيث $a > 0$ المعادلة تقبل حلين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$

حل في $\mathcal{R}$ المعادلة : $x^2 = 9$

$$x^2=9 \Leftrightarrow x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2-3^2=0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3)=0 \Leftrightarrow$$

$$x+3=0 \Leftrightarrow x_1=-3$$

$x-3=0 \Leftrightarrow x_2=3$

إذن المعادلة تقبل حلين هما : 3 و -3

حل في $\mathcal{R}$ المعادلة : $2x^2=10$

$2x^2=10 \Leftrightarrow x^2=\frac{10}{2} \Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x^2-5=0 \Leftrightarrow x^2-\sqrt{5}^2=0$

$\Leftrightarrow (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0 \Leftrightarrow$

$x+\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow x_1=-\sqrt{5}$

$x-\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow x_2=\sqrt{5}$

إذن المعادلة تقبل حلين هما : $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$

الحالة الثالثة : $x^2=a$ بحيث $a<0$ المعادلة لا تقبل حل .

حل في $\mathcal{R}$ المعادلة : $x^2+12=2$

$x^2+12=2 \Leftrightarrow x^2=2-12 \Leftrightarrow x^2=-10$

إذن المعادلة لا تقبل حل لأن x^2 يكون دائما موجبا أو منعدما $x^2 \geq 0$.

تمارين (١ - ١)

تمرين ١:

احسب

1. $5\sqrt{81} =$
2. $\sqrt{8^2+6^2} =$
3. $\sqrt{3}+\sqrt{81} =$
4. $\frac{\sqrt{25}+\sqrt{16}}{\sqrt{9}} =$

تمرين ٢:

اكتب الأعداد التالية على شكل $a\sqrt{b}$:

1. $\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2-a+b =$
2. $\sqrt{a^4b^2}\times\sqrt{a^3b}\times\sqrt{ab^3} =$
3. $2\sqrt{5}+5\sqrt{20} =$
4. $\sqrt{45}-\sqrt{5}+3\sqrt{20} =$
5. $\sqrt{63}+\sqrt{28}-\sqrt{700} =$
6. $\sqrt{44}-\sqrt{99}+6\sqrt{11} =$

تمرين ٣:

احذف الجذر من المقام:

1. $\frac{5}{\sqrt{3}} =$
2. $\frac{-5}{2\sqrt{3}} =$
3. $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} =$
4. $\frac{1}{2-\sqrt{3}} =$
5. $\frac{2}{\sqrt{5}+3} =$
6. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$

تمرين ٤:

حل في $\mathcal{R}$ المعادلات التالية:

1. $x^2 = 36$
2. $5 - x^2 = -4$
3. $\frac{5}{12}x^2 - \frac{5}{3} = 0$
4. $9x^2 = 4x^2$
5. $x^2 + 3 = 0$

الباب الثاني: حل المعادلات من الدرجة الثانية

حل المعادلات من الدرجة الثانية

تعريف ١:

معادلة من الدرجة الثانية هي معادلة يمكن كتابتها على الشكل القياسي التالي:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ , \qquad a \neq 0$$

ويمكن حلها بعدة طرق منها:

طريقة التحليل.

اذا كان من الممكن تحليل كثيرة الحدود $ax^2 + bx + c$ باستخدام أعداد صحيحة فيمكن حينئذ تطبيق خاصية صفر حاصل الضرب كالتالي :

$$AB = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

مثال ٤:

حل المعادلات التالية:

$$1)\ x^2 + 8x + 15 = 0 \ , \qquad\qquad 2)\ 2x^2 + x - 6 = 0$$

الحـــل:

١. باستخدام طرق التحليل التي سبق أن رأيناها في الباب الأول نجد أن:

$$x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5)$$

وباستخدام خاصية صفر حاصل الضرب يكون الحل كما يلي:

$$x^2 + 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3) = 0 \\ (x+5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -5 \end{cases}$$

أذن حلول المعادلة $x^2 + 8x + 15 = 0$ هي $x = -3$ و $x = -5$.

وجدنا حلين لأن المعادلة من الدرجة ويمكن التأكد من الحلول بتعويضها في المعادلة الأصلية.

٢. يتم التحليل هنا بالبحث عن قيم للأعداد $m\ ,\ n\ ,\ p\ ,\ q$ لأن $a \neq 1$ و يكون الحل كالتالي:

$$2x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (2x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ x = -2 \end{cases}$$

أذن حلول المعادلة $2x^2 + x - 6 = 0$ هي $x = -2$ و $x = \frac{3}{2}$.

طريقة الجذر التربيعي:

اذا كانت A و B عبارتين جبريتين حيث : $A^2 = B$ و $B > 0$ اذن $A = \pm\sqrt{B}$

مثال ٥:

حل المعادلات التالية:

$$1)\ x^2 - 5 = 0\ , \qquad 2)\ (x+1)^2 = 49$$

الحـــل:

١. بعد إضافة 5 إلى طرفي المعادلة يمكن حلها بطريقة الجذر التربيعي كالتالي:

$$x^2 - 5 + 5 = 0 + 5 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

إذن حلول المعادلة $x^2 - 5 = 0$ هي $x = \sqrt{5}$ و $x = -\sqrt{5}$.

٢. هنا يمكن تطبيق الطريقة مباشرة كالتالي:

$$(x+1)^2 = 49 \Leftrightarrow x + 1 = \pm\sqrt{49} \Leftrightarrow \mathrm{x} + 1 = \pm 7 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{x} + 1 = 7 \\ \mathrm{x} + 1 = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 1 \\ \mathrm{x} = -7 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{x} = 6 \\ \mathrm{x} = -8 \end{cases}$$

أذن حلول المعادلة $(x+1)^2 = 49$ هي $x = 6$ و $x = -8$.

طريقة القانون العام (طريقة المميز):

تتلخص طريقة القانون العام في حساب $\Delta = b^2 - 4\mathrm{ac}$ ونسمي هذه القيمة بالمميز وتكون :

حلول المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ هي $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ولأن قيمة المميز $\Delta = b^2 - 4\mathrm{ac}$ موجودة تحت الجذر فهناك ثلاث حالات هي كالتالي :

١. اذا كانت القيمة $\Delta = b^2 - 4\mathrm{ac}$ موجبة فهناك حلان حقيقيان مختلفان :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ , \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

٢. اذا كانت القيمة $\Delta = b^2 - 4\mathrm{ac}$ تساوي الصفر فهناك حلان حقيقيان متشابهان :

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

٣. اذا كانت القيمة $\Delta = b^2 - 4\mathrm{ac}$ سالبة فليست هناك حلول حقيقية .

مثال ٦:

حل المعادلات التالية:

$$1)\ 2x^2 - 5x + 2 = 0\ , \qquad 2)\ x^2 + 6x + 9 = 0\ , \qquad 3)\ 3x^2 + 6x + 7 = 0$$

الحــل:

١. في هذه الحالة $a = 2\ ,\ b = -5\ ,\ c = 2$ اذن :

$$\Delta = \ b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(2) = 25 - 16 = 9 > 0$$

أذن هناك حلان حقيقيان مختلفان وهما:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

٢. في هذه الحالة $a = 1\ ,\ b = 6\ ,\ c = 9$ اذن :

$$\Delta = \ b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$$

أذن هناك حلان حقيقيان متشابهان وهما:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(6)}{2(1)} = -3$$

٣. في هذه الحالة $a = 3\ ,\ b = 6\ ,\ c = 7$ أذن :

$$\Delta = \ b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(3)(7) = 36 - 84 = -48 < 0$$

أذن هذه المعادلة ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

تمارين (٢ - ١)

تمرين ١: اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي:

١. حل المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$ هو

$a)\begin{cases}x_1 = 2\\ x_2 = 3\end{cases}$ $b)$ لا يوجد حلول حقيقية $c)\begin{cases}x_1 = -2\\ x_2 = 3\end{cases}$ $d)\begin{cases}x_1 = -2\\ x_2 = 0\end{cases}$

٢. حل المعادلة $2x^2 - 4x + 3 = 0$ هو

$a)\begin{cases}x_1 = -2\\ x_2 = 2\end{cases}$ $b)$ لا يوجد حلول حقيقية $c)\begin{cases}x_1 = -4\\ x_2 = 3\end{cases}$ $d)\begin{cases}x_1 = 1\\ x_2 = 1\end{cases}$

٣. حل المعادلة $x^2 - 4 = 0$ هو

$a)\begin{cases}x_1 = 2\\ x_2 = -2\end{cases}$ $b)$ لا يوجد حلول حقيقية $c)\begin{cases}x_1 = -2\\ x_2 = 8\end{cases}$ $d)\begin{cases}x_1 = 4\\ x_2 = -4\end{cases}$

٤. حل المعادلة $x^2 + 3x = 0$ هو

$a)\begin{cases}x_1 = -5\\ x_2 = 3\end{cases}$ $b)$ لا يوجد حلول حقيقية $c)\begin{cases}x_1 = 0\\ x_2 = -3\end{cases}$ $d)\begin{cases}x_1 = 5\\ x_2 = 1\end{cases}$

٥. حل المعادلة $3x - 3 = 2x^2 + 6$ هو

$a)\begin{cases}x_1 = -2\\ x_2 = 0\end{cases}$ $b)$ لا يوجد حلول حقيقية $c)\begin{cases}x_1 = -2\\ x_2 = 3\end{cases}$ $d)\begin{cases}x_1 = 2\\ x_2 = 3\end{cases}$

٦. حل المعادلة $\frac{5x^2-6x}{2} = 3x - 10$ هو

$a)\begin{cases}x_1 = -2\\ x_2 = 6\end{cases}$ $b)$ لا يوجد حلول حقيقية $c)\begin{cases}x_1 = -2\\ x_2 = 3\end{cases}$ $d)\begin{cases}x_1 = 5\\ x_2 = 10\end{cases}$

تمرين ٢: حل المعادلات التالية بطريقة التحليل:

1) $x^2 - 2x - 15 = 0$

2) $8y^2 + 189y - 72 = 0$

3) $3x^2 - 7x = 0$

4) $8 + 14t - 15t^2 = 0$

5) $(x - 5)^2 - 9 = 0$

6) $(2x - 5)^2 - (4x - 11)^2 = 0$

تمرين ٣: حل المعادلات التالية بطريقة الجذر التربيعي:

1) $x^2 = 81$

2) $2x^2 - 72 = 0$

3) $(x-5)^2 = 36$

4) $(x-8)^2 = (x+1)^2$

5) $x^2 = (x+1)^2$

6) $4x^2 = (2x+3)^2$

تمرين ٤: حل المعادلات التالية بطريقة المميز:

1) $x^2 - 2x - 15 = 0$

2) $x^2 + x - 1 = 0$

3) $2x^2 + 4x + 1 = 0$

4) $3x^2 - 5x + 3 = 0$

5) $x^2 + 3x - 1 = 0$

6) $2x^2 - 5x + 3 = 0$

7) $-x^2 = 7x - 1$

8) $2x^2 + 3x + 5 = 0$

9) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

جملة معادلتين واحدة من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية

نفترض أن المطلوب إيجاد قيم $(x\ ,\ y)$ لحل المعادلتين

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax^2 + bxy + y^2 + c = 0 \end{cases}$$

لحل هاتين المعادلتين نتبع الخطوات الآتية:

١. في المعادلة الأولى نوجد y بدلالة x أو x بدلالة y .
٢. نعوض عن قيم y في المعادلة الثانية ونوجد قيم x .
٣. بالتعويض في المعادلة الأولى نوجد قيم y المقابلة لقيم x .

مثال ٧:

أوجد مجموعة حل المعادلتين

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -4x^2 + 5y^2 = 36 \end{cases}$$

الحـــل:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -4x^2 + 5y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{y} = -\mathrm{x} \quad \longrightarrow (1) \\ -4x^2 + 5y^2 = 36 \quad \longrightarrow \ (2) \end{cases}$$

بتعويض معادلة رقم (1) في معادلة رقم (2) ، ينتج أن :

$$-4x^2 + 5(-x)^2 = 36$$

$$-4x^2 + 5x^2 = 36$$

$$x^2 = 36$$

$$x_{1,2} = \sqrt{36} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = +6 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

بالتعويض في معادلة رقم (1) ، ينتج أن :

$$y_{1,2} = \begin{cases} y_1 = -6 \\ y_2 = +6 \end{cases}$$

أذن مجموعة الحل هي : $\{(6,-6),(-6,6)\}$.

مثال ٨:

أوجد مجموعة حل المعادلتين

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

الحـل:

$$\begin{cases} x = 2 & \longrightarrow \quad (1) \\ x^2 + xy + y^2 = 7 & \longrightarrow \quad (2) \end{cases} \Longrightarrow$$

بتعويض معادلة رقم (1) في معادلة رقم (2) ، ينتج أن :

$$2^2 + 2y + y^2 - 7 = 0$$

$$4 + 2y + y^2 - 7 = 0$$

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

باستخدام طريقة القانون العام (طريقة المميز) لحل هذه المعادلة:

في هذه الحالة $a = 1\ ,\ b = 2\ ,\ c = -3$ اذن :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

أذن هناك حلان حقيقيان مختلفان وهما:

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2(1)} = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2(1)} = \frac{-2 - 4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

أذن مجموعة الحل هي:

$$(2\ ,1),(2\ ,-3)$$

مثال ٩:

أوجد مجموعة حل المعادلتين

$$\begin{cases} -x + y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 13 = 0 \end{cases}$$

الحـل:

$$\begin{cases} -x + y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 13 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} y = x + 1 & \longrightarrow \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 13 & \longrightarrow \quad (2) \end{cases} \Longrightarrow$$

بتعويض معادلة رقم (1) في معادلة رقم (2)، ينتج أن :

$$\boldsymbol{x^2 + (x+1)^2 = 13}$$

$$\boldsymbol{x^2 + x^2 + 2x + 1 - 13 = 0}$$

$$\boldsymbol{2x^2 + 2x - 12 = 0}$$

بالقسمة على ٢، ينتج أن:

$$\boldsymbol{x^2 + x - 6 = 0}$$

$$\boldsymbol{(x+3)(x-2) = 0}$$

$$\boldsymbol{(x+3) = 0 \ \Longrightarrow x_1 = -3}$$

$$\boldsymbol{(x-2) = 0 \ \Longrightarrow x_2 = 2}$$

بالتعويض في معادلة رقم (1) ، ينتج أن :

$$\boldsymbol{y_1 = -3 + 1 = -2}$$

$$\boldsymbol{y_2 = 2 + 1 = 3}$$

أذن مجموعة الحل هي:

$$\boldsymbol{(-3\ \ ,-2), (2\ \ ,3).}$$

تمارين (٢ - ٢)

أوجد مجموعة حل كل زوج من المعادلات الآتية:

1. $\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 2x^2 - 2xy - 4y^2 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ x^2 - 2xy + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x - 2y + 3 = 0 \\ 3x^2 + 2xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$

الباب الثالث: مفهوم الدالة ومنحناها

الهدف العام

معرفة مفهوم الدالة وأنواعها، وبعض الدوال العددية المشهورة، والقدرة على تمثيل منحنياتها.

الأهداف التفصيلية

بعد دراسة هذا الباب يتمكن المتدرب من معرفة:

- الدوال من غيرها وتحديد مجالها ومداها.
- أنواع الدوال المختلفة.
- الدوال العددية.
- بعض الدوال الجبرية المشهورة.
- تمثيل منحنيات الدوال.

مفهوم الدالة ومنحناها

استخدمت الدوال منذ القدم ولكنها لم تدرس كمفهوم رياضي إلا حديثا.

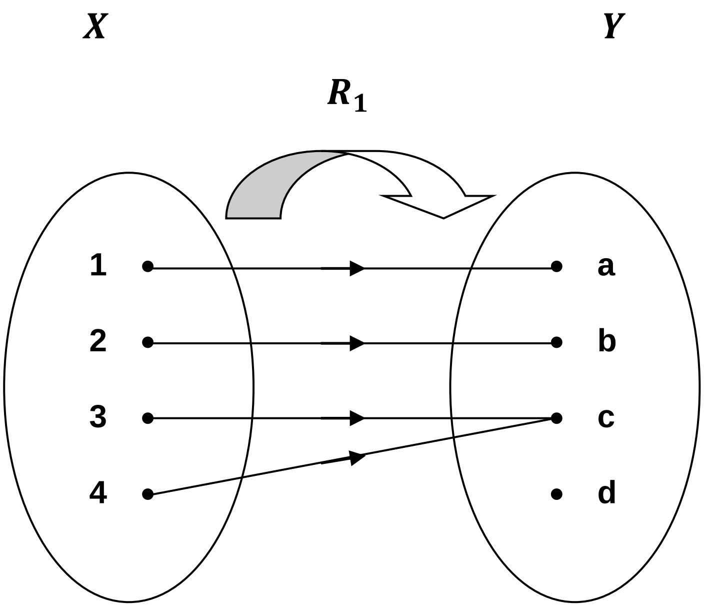
ومن تطبيقاتها: الدوال العددية المشهورة التي تدخل في كثير من القوانين التجريبية، وكذلك الدوال الخاصة بالبرمجة في الحاسب الآلي.

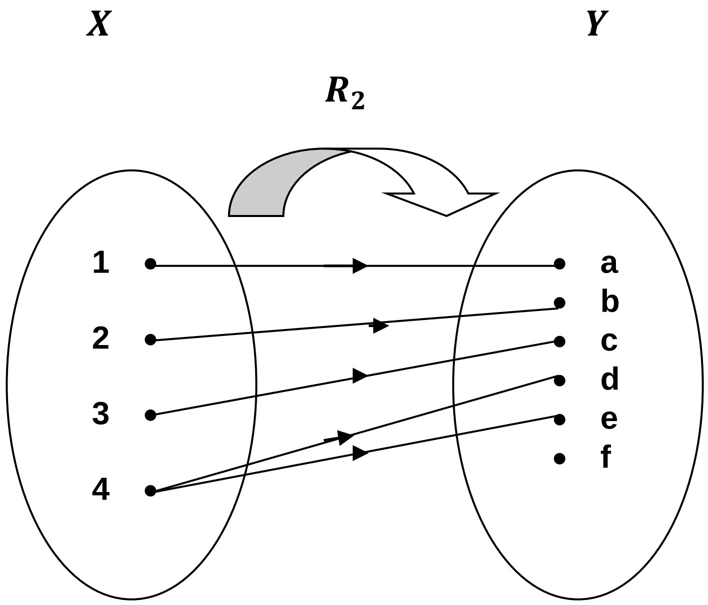
تعريف الدالة

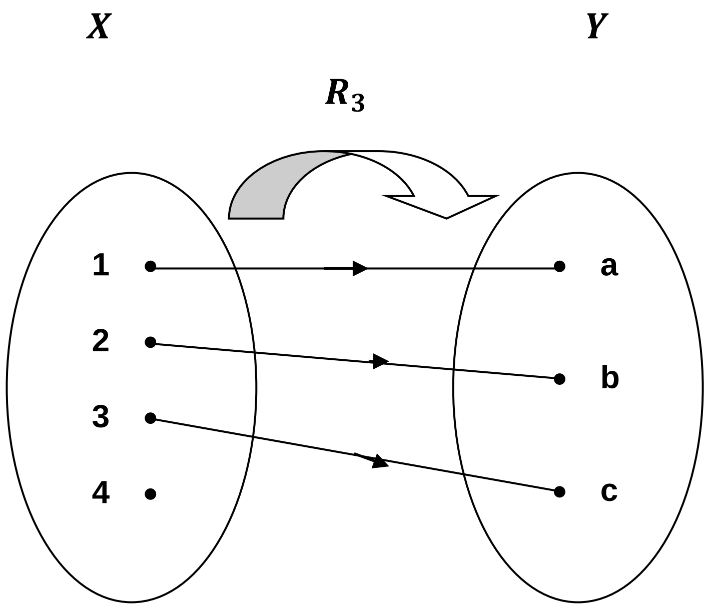
تعريف: إذا كان X،Y مجموعتين غير خاليتين فإن العلاقة من X إلى Y تسمى دالة إذا ارتبط كل عنصر من عناصر X بعنصر واحد فقط من عناصر Y.

مثال ١٠:

أذكر أي من العلاقات التالية يمثل دالة مع ذكر السبب.







<u>الحل:</u>

العلاقة R_1 دالة لأن كل عنصر من عناصر X ارتبط بعنصر واحد فقط من Y .

العلاقة R_2 ليست دالة لأن العنصر (٤) من عناصر X ارتبط بعنصرين من Y .

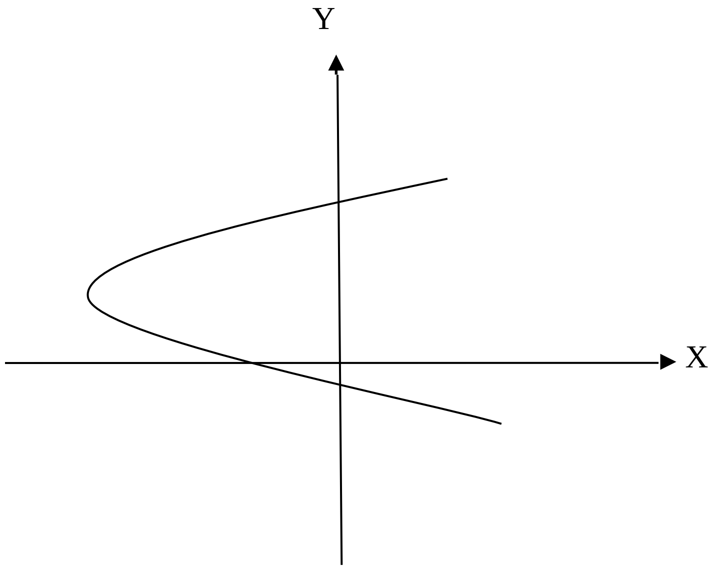
العلاقة R_3 ليست دالة لأن العنصر (٤) من عناصر X لم يرتبط بأي عنصر من Y .

<u>تحديد إن كان الشكل البياني يمثل (دالة) أو (لا)</u>

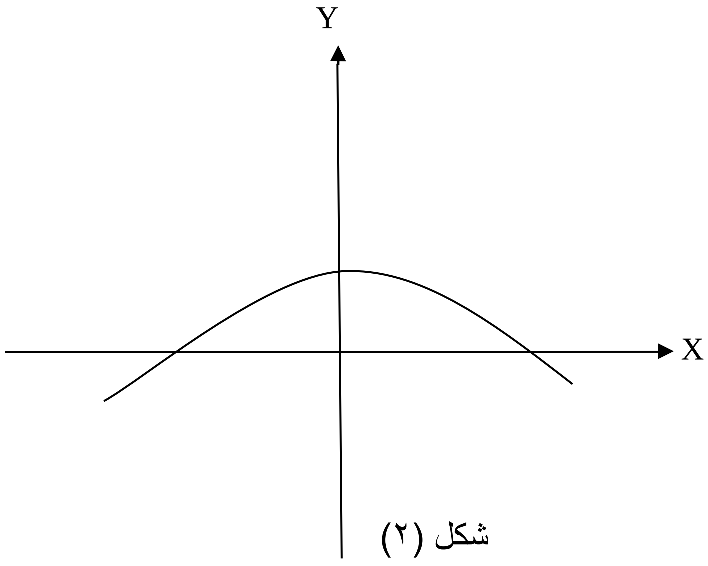
يتم ذلك باختبار الخط الرأسي: إذا وجد خط رأسي يقطع الشكل البياني في أكثر من نقطة فإن الشكل لا يمثل دالة.

مثال ١١:

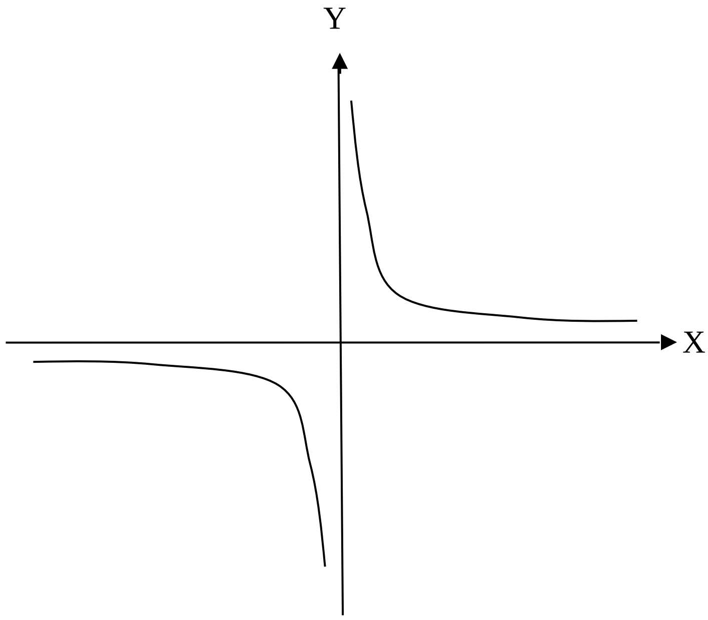
أذكر أي من الأشكال الآتية يمثل دالة.



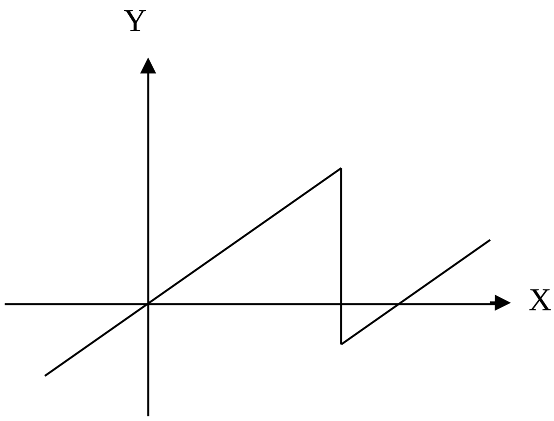
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

الحـل

شكل (١) لا يمثل دالة لأنه يوجد خط رأسي يقطع المنحنى في أكثر من نقطة واحدة.

شكل (٢) يمثل دالة لأن أي خط رأسي يقطع المنحنى في نقطة واحدة على الأكثر.

شكل (٣) يمثل دالة لأن أي خط رأسي يقطع المنحنى في نقطة واحدة على الأكثر.

شكل (٤) لا يمثل دالة لأنه يوجد خط رأسي يقطع الشكل البياني في أكثر من نقطة.

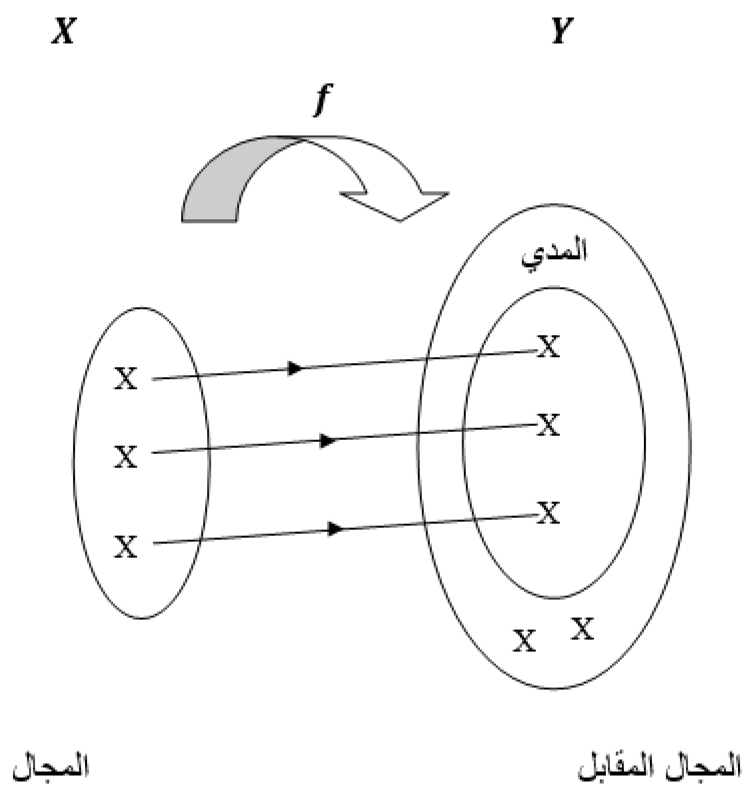
المجال والمجال المقابل والمدى

إذا كان f دالة من المجموعة X إلى المجموعة Y فإن:

- المجموعة X تسمى مجال الدالة (Domain) ويرمز لمجال الدالة f بالرمز D_f.
- المجموعة Y تسمى المجال المقابل (Codomain).

صور عناصر X الموجودة في Y تسمى المدى (Range or Image).

ويرمز لمدى الدالة f بالرمز R_f .



أي أن المدى مجموعة جزئية من المجال المقابل.

الدالة الحقيقية

الدالة $f : X \to Y$ تسمى دالة حقيقية إذا كان المجال X والمجال المقابل Y هما مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها .

تعيين مجال الدالة:

١. **الدالة كثيرة الحدود:**

مجال دالة كثيرة الحدود هو الأعداد الحقيقية R ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها

٢. **الدالة الكسرية:**

إذا كان $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ حيث $g(x)$ ، $h(x)$ كثيرتي حدود

فإن مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية فرق مجموعة أصفار المقام

$R - \{$أصفار المقام$\}$

لاحظ: أصفار المقام هي القيم التي تجعل المقام = صفر

مثال ١٢:

عين مجال الدوال الآتية:

a) $f(x) = 3x^2 + 5$

b) $f(x) = 7$

c) $f(x) = \frac{3}{x-5}$

d) $f(x) = \frac{x^2+5}{x}$

e) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

الحل:

a) $f(x)$ كثيرة حدود مجالها R

b) $f(x)$ كثيرة حدود (ثابتة) مجالها R

c) $f(x)$ دالة كسرية $\leftarrow$ المقام = صفر إذا كان :

$x - 5 = 0$

$x = 5$

$\therefore$ المجال $R - \{5\}$

d) $f(x)$ دالة كسرية $\leftarrow$ المقام = صفر إذا كان :

$x = 0$

$\therefore$ المجال $R - \{0\}$

e) $f(x)$ **دالة كسرية $\leftarrow$ المقام = صفر إذا كان :**

$x^2 - 9 = 0$

$(x + 3)(x - 3) = 0$

$x = \pm 3$

$\therefore$ المجال $R - \{-3, 3\}$

لا يمكن إيجاد قيمة هذه الدالة عند x=3,x=-3 لأنها خارج مجال الدالة.

لذلك تستخدم النهايات لإيجاد قيمة الدالة عندما تقترب من قيم مثل هذه (هذا ما سوف ندرسه لاحقا)..

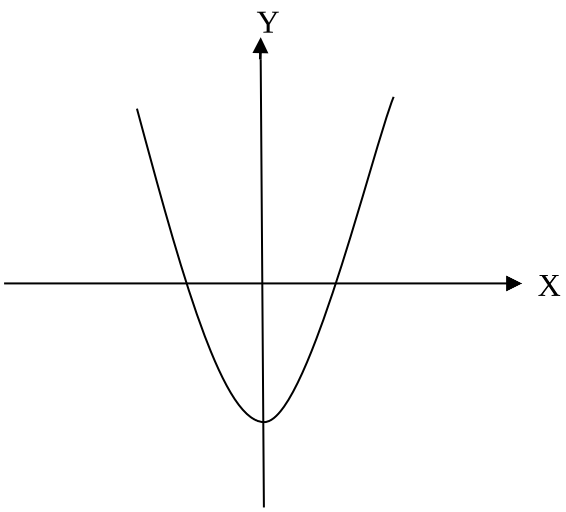
بعض أنواع الدوال

الدالة الفردية والدالة الزوجية

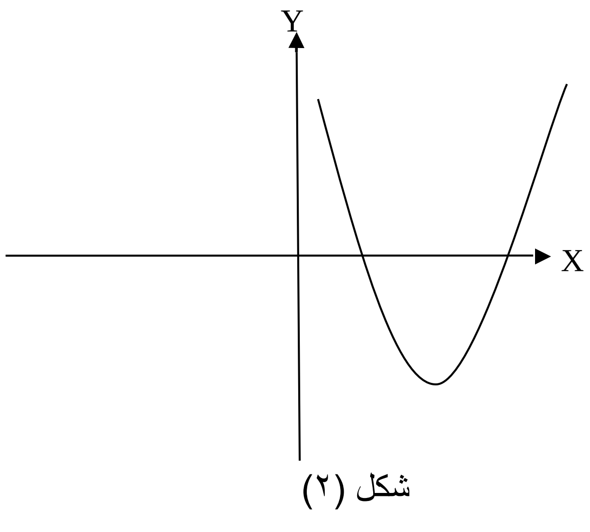
- يقال أن الدالة زوجية إذا كان $\forall x \in D_f \quad f(-x) = f(x)$ ويكون الشكل البياني متماثل حول محور $\boldsymbol{Y}$.
- يقال أن الدالة فردية إذا كان $\forall x \in D_f \quad f(-x) = -f(x)$ ويكون الشكل البياني متماثل حول نقطة الأصل.
- إذا لم يتحقق أي من الشرطيين السابقين تكون الدالة ليست فردية ولا زوجية.

مثال ١٣:

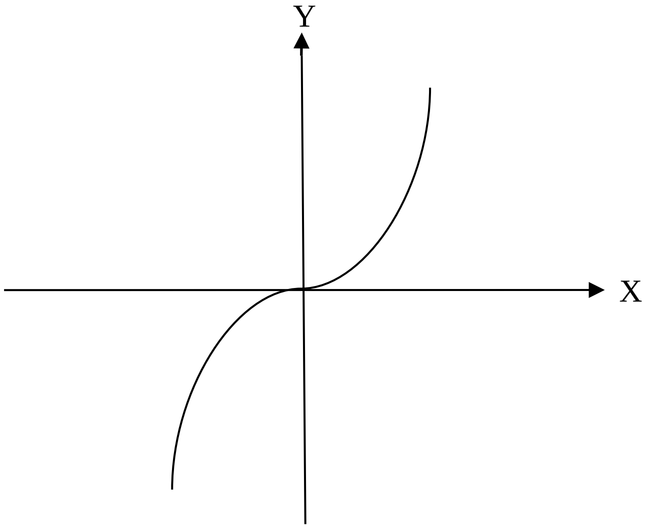
حدد من الأشكال التالية إذا ما كانت الدالة فردية أو زوجية أو غير ذلك:



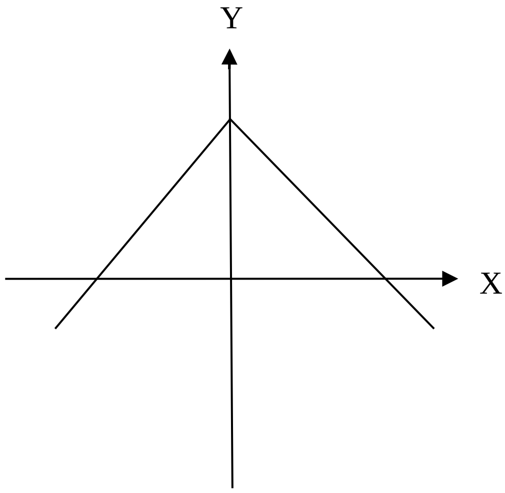
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

الحل

شكل (١) يمثل دالة زوجية لأنه متماثل حول محور Y .

شكل (٢) يمثل دالة ليست فردية ولا زوجية.

شكل (٣) يمثل دالة فردية لأنها متماثلة حول نقطة الأصل .

شكل (٤) يمثل دالة زوجية لأنه متماثل حول محور Y.

مثال ١٤:

ابحث نوع الدوال التالية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك:

$a)\ f(x) = x^2$ $\qquad b)f(x) = 2x^3$

$c)\ f(x) = x + 7$ $\qquad d)\ f(x) = x^3 + x$

الحـــل

$$a)\ f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

$\therefore\ f(-x) = f(x)$ دالة زوجية

$$b)\ f(-x) = 2(-x)^3 = -2x^3$$

$\therefore\ f(-x) = -f(x)$ دالة فردية

$$c)\ f(-x) = -x + 7$$

$\therefore\ f(-x) \neq f(x)\ ,\quad f(-x) \neq -f(x)$

ليست فردية ولا زوجية

$$d)\ f(-x) = (-x)^3 + (-x)$$

$$= -x^3 - x$$

$$= -(x^3 + x)$$

$\therefore\ f(-x) = -f(x)$ دالة فردية

منحنى الدالة

يمكن تمثيل الدوال العددية التي يكون مجالها مجموعة عددية فيما يسمى بالمستوى الديكارتي وذلك بإتباع الخطوات التالية:

١. إنشاء جدول لقيم x (المعرفة) مرتبة من أصغرها إلى أكبرها و قيم $y = f(x)$ الموافقة لها.

٢. رسم النقاط (x, y) الناتجة في المستوى الديكارتي.

٣. وصل النقاط بعضها ببعض حسب ترتيبها بقطع مستقيمة إذا كانت القيم الموافقة للعنصر x لها صورة.

مثال ١٥:

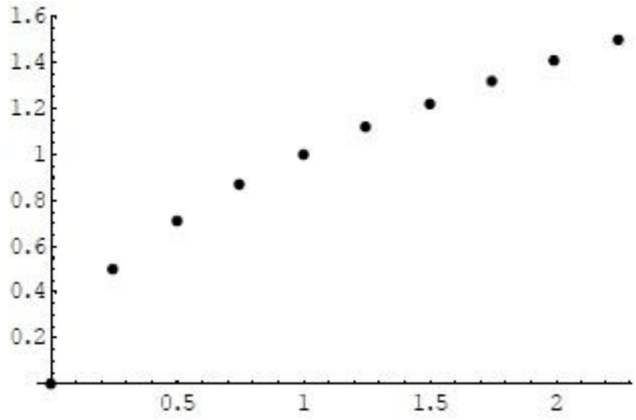
مثل الدالة التالية : $f : R \longrightarrow R$ حيث $f(x) = \sqrt{x}$

الحـــل:

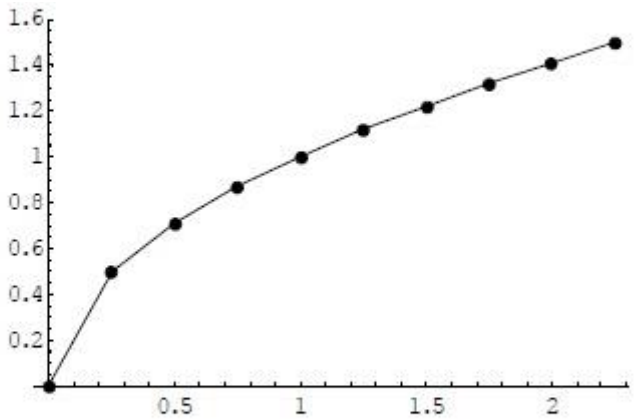
الخطوة الأولى: إنشاء جدول القيم:

x	0	0.25	0.50	1	1.25	1.50	1.75	2	2.25
$y = \sqrt{x}$	0	0.50	0.71	1	1.12	1.22	1.32	1.41	1.50

الخطوة الثانية: رسم النقاط الناتجة:



الخطوة الثالثة: وصل النقاط بقطع مستقيمة:



كلما كان جدول القيم أكثر دقة و أكثر قيما كلما كان التمثيل أدق

وهذا التمثيل يعطي لنا جزءا مما يسمى منحنى الدالة.

الدوال الجبرية

تعريف ٨:

الدوال الجبرية هي الدوال التي يمكن تعريفها باستخدام كثيرات الحدود وعمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة (المطولة).

وهي نوعان: كثيرات الحدود وهي التي نستخدم فيها الجمع والطرح والضرب فقط، والدوال الكسرية وهي التي نستخدم فيها العمليات السابقة والقسمة أيضا.

ومن الدوال الجبرية: الدالة الثابتة والدالة الخطية والدالة التربيعية والدالة الكسرية.

١. الدالة الثابتة:

وهي من الشكل $f : R \longrightarrow R$ حيث $y = f(x) = a$ و a عدد حقيقي ثابت .

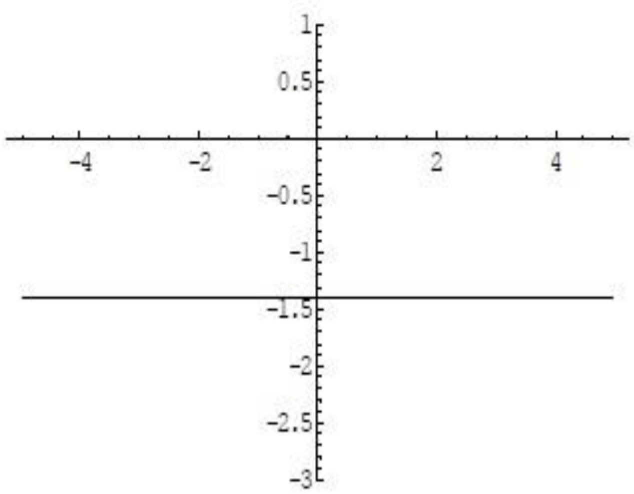
ومن خواصها:

- $D_f = R$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.
- $R_f = \{a\}$ أي أنها تقبل قيمة واحدة فقط.
- $f(-x) = f(x)$ أي أنها زوجية.
- يمكن تمثيلها بخط مستقيم يوازي محور السينات.

مثال ١٦:

مثل الدالة التالية : $f : R \longrightarrow R$ حيث $f(x) = -\sqrt{2}$

الحـــل:



٢. الدالة الخطية:

وهي من الشكل $f : R \longrightarrow R$ حيث $y = f(x) = ax + b$ و a, b عددان حقيقيان ثابتان و $a \neq 0$ أي أنها كثيرة حدود من الدرجة الأولى.

ومن خواصها:

- $D_f = R$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.
- $R_f = R$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية.
- ليست فردية ولا زوجية.
- يمكن تمثيلها بخط مستقيم مائل يمر من نقطة الأصل إذا كانت $b = 0$ وبخط مستقيم مائل يمر من النقطة $(0, b)$ إذا كانت $b \neq 0$.

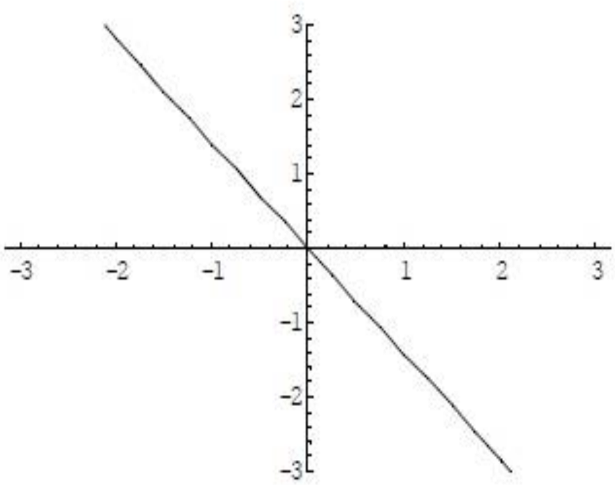
مثال ١٧:

مثل الدالة التالية : $f : R \longrightarrow R$ حيث $f(x) = -\sqrt{2}x$

الحــل:

الخطوة الأولى: إنشاء جدول القيم:

x	0	-1	-2	-3	1	2	3
$y = -\sqrt{2}x$	0	1.41	2.82	4.24	-1.41	-2.82	-4. 24



مثال ١٨:

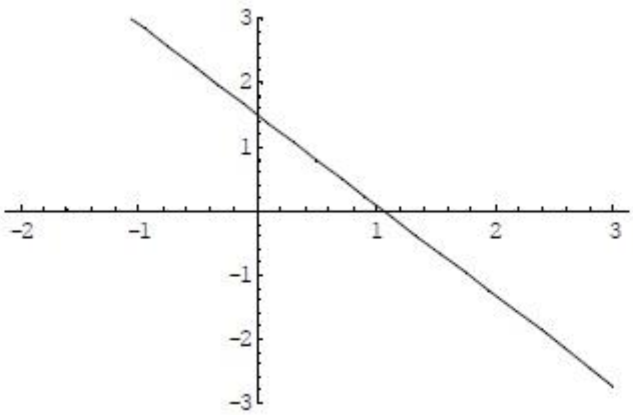
مثل الدالة التالية : $f : R \longrightarrow R$ حيث $f(x) = -\sqrt{2}x + 1.5$

الحــل:

الخطوة الأولى:

إنشاء جدول القيم:

x	0	- 0.5	-1	1	2	3
$y = -\sqrt{2}x + 1.5$	1.5	2.20	2.91	0.08	-1.32	-2.74



٣. الدالة التربيعية:

وهي من الشكل $f: R \longrightarrow R$ حيث $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ و $a \neq 0$ و b, c أعداد حقيقية ثابتة أي أنها كثيرة حدود من الدرجة الثانية .

ومن خواصها:

- $D_f = R$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.
- $R_f \neq R$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية.
- ليست فردية ولا زوجية ولكنها زوجية إذا كان $b = 0$.
- يمكن تمثيلها بقطع مخروطي زائد يمر من نقطة الأصل إذا كان $b = c = 0$.

مثال ١٩:

مثل الدالة التالية : $f: R \longrightarrow R$ حيث $f(x) = -\sqrt{2}x^2 + 1.5$

الحـــل:

يتم إيجاد رأس المنحنى عن طريق القانون:

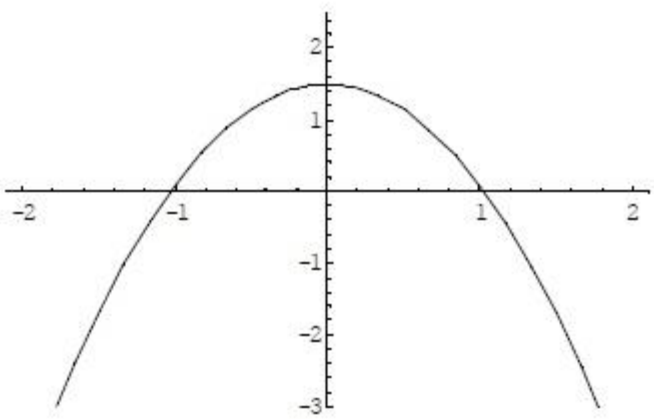
$$\boldsymbol{v = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{0}{2 \times (-\sqrt{2})}, -\frac{-4 \times (-\sqrt{2}) \times 1.5}{4 \times (-\sqrt{2})}\right) = \left(0, +\frac{3}{2}\right)}$$

حيث:

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 \times (-\sqrt{2}) \times 1.5 = 8.5}$$

إنشاء جدول القيم:

x	0	-1	1	- 0.5	+ 0.5
$y = -\sqrt{2}x^2 + 1.5$	1.5	0.08	0.08	1.146	1.146



٤. الدالة الكسرية:

وهي عبارة عن كسر بسطه ومقامه كثيرات حدود.

وسنأخذ كمثال لها الدالة : $f : R \longrightarrow R$ حيث $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

ومن خواصها:

- $D_f = R - \{1\}$ أي أنها ليست معرفة لكل عدد حقيقي.
- $R_f \neq R - \{2\}$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية.
- ليست فردية ولا زوجية.
- يمكن تمثيلها بقطع مخروطي مكافئ لا يمر من نقطة الأصل.

تمارين (٣ - ١)

تمرين ١: بين أن كلا من العلاقات التالية دوال:

$1)\ f: N \longrightarrow N, \quad f(x) = x^3$

$2)\ f: N \longrightarrow N, \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$

$3)\ f: R \longrightarrow R, \quad f(x) = x^3 + 1$

$4)\ f: R \longrightarrow R, \quad f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$

تمرين ٢: حدد مجال كل دالة من التمرين ١ ومداها

تمرين ٣: هل كل مما يلي دالة فردية أم زوجية أم غير ذلك؟

$1)\ f: R \longrightarrow R, \quad f(x) = 2x^2 + 3$

$2)\ f: R \longrightarrow R, \quad f(x) = \frac{1}{x}$

$3)\ f: R \longrightarrow R, \quad f(x) = x^3$

$4)\ f: R \longrightarrow R, \quad f(x) = |x|$

تمرين ٤: مثل بيانيا كلا من الدوال التالية:

$1)\ f: R \longrightarrow R, \quad f(x) = 2x^2 + 3$

$2)\ f: R \longrightarrow R, \quad f(x) = x^2$

$3)\ f: R \longrightarrow R, \quad f(x) = \sqrt{3}$

الباب الرابع: مدخل إلى علم المثلثات

الأهداف

بعد دراسة هذا الباب يكون للطالب القدرة على:

- تصنيف وحساب الزوايا.
- تحويل الزوايا من وحدة إلى أخرى وحساب قيم المثلثات للزوايا.
- التعامل مع الدوال المثلثية واستنتاج العلاقة بينها.
- استخدام المتطابقات الأساسية للمثلثات.

قياس الزوايا

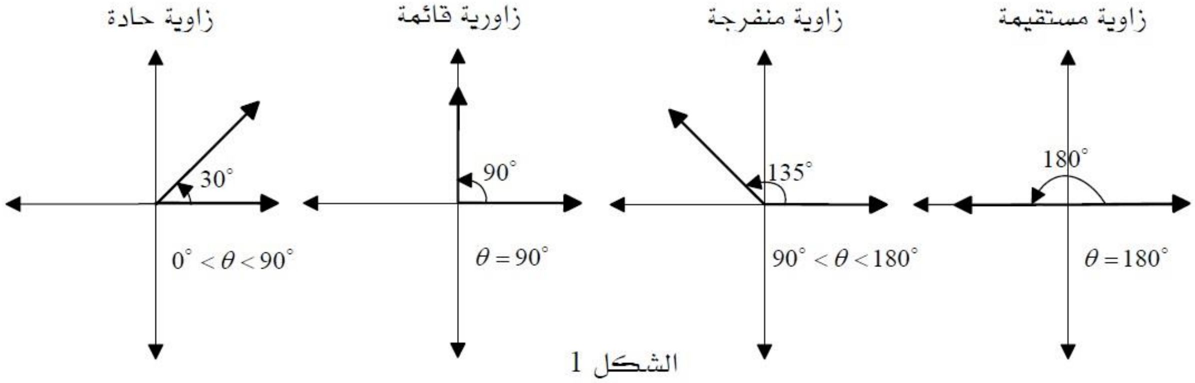
قياس الزوايا هو مقدار دوران أحد أضلع الزاوية (الضلع النهائي) بالنسبة للضلع الثاني (الضلع الابتدائي).

وعادة ما نستخدم وحدة " الدرجة " لهذا القياس (°). تكون قيمة القياس موجبة إذا كانت الزاوية مكونة من دوران في اتجاه معاكس لعقارب الساعة وسالبة إذا كان الدوران في اتجاه عقارب الساعة.

قياس زاوية θ مشكلة من دورة كاملة في اتجاه عقارب الساعة هو $360°$ وبالتالي $1°$ هو قياس زاوية مشكلة من $\frac{1}{360}$ من الدورة الكاملة .

وتكون الزاوية في وضع قياسي إذا كان رأسها هو أصل المحورين و الضلع الابتدائي لها ينطبق على الجزء الموجب للمحور X.

عادة ما نصنف الزوايا إلى أربعة أصناف كما هو موضح في الشكل ١.



الشكل 1

كما أن في الساعة ٦٠ دقيقة و في الدقيقة ٦٠ ثانية ، فإن في الدرجة الواحدة $(1°)$ ٦٠ دقيقة $(60')$ وفي الدقيقة ٦٠ ثانية $(60'')$:

درجة واحدة $(1°)$= ٦٠ دقيقة $(60')$

دقيقة واحدة $(1')$ = ٦٠ ثانية $(60'')$

فمثلا زاوية $\boldsymbol{\theta}$ قياسها ٦١ درجة ، ٣٥ دقيقة ، ٤٧ ثانية تكتب بالشكل القياسي :

$$\boldsymbol{\theta = 61°35'47''}$$

مثال ٢٠:

أعد كتابة $\boldsymbol{\theta = 43°74'89''}$ بالشكل القياسي.

الحــل:

من الواضح أن $74' = 60' + 14' = 1°14'$ و $89'' = 60'' + 29'' = 1'29''$

إذن : $\boldsymbol{\theta = 43°74'89''} = (43° + 1°)(14' + 1')(29'') = 44°15'29''$

حل آخر باستخدام الآلة الحاسبة:

نكتب العدد ٤٣ ثم نضغط على الزر [ووو٥] ؛ نكتب العدد ٧٤ ثم نضغط على الزر [ووو٥] ؛

نكتب العدد ٨٩ ثم نضغط على الزر [ووو٥] . ثم نضغط على الزر [=] نحصل على الناتج بالدرجات والدقائق والثواني. $\boldsymbol{\theta} = 44°15'29''$

مثال ٢١:

أوجد $\boldsymbol{2)360° - 75°18'48''}$ $\boldsymbol{1)\ 75°23'41'' + 34°47'25''}$

الحـل:

(١)

$$\boldsymbol{75°23'41'' + 34°47'25 = (75° + 34°)(23' + 47')(41'' + 25'') =}$$
$$\boldsymbol{109°70'66'' = (109° + 1°)(10' + 1')(6'') = 110°\ 11'\ 6''}$$

حل آخر باستخدام الآلة الحاسبة:

نكتب العدد ٧٥ ثم نضغط على الزر [ووو٥] ؛ نكتب العدد ٢٣ ثم نضغط على الزر [ووو٥] ؛

نكتب العدد ٤١ ثم نضغط على الزر [ووو٥] . ثم نضغط على الزر [+] ، و نكتب من جديد العدد ٣٤

ثم نضغط على الزر [ووو٥] ؛ نكتب العدد ٤٧ ثم نضغط على الزر [ووو٥] ؛

نكتب العدد ٢٥ ثم نضغط على الزر [ووو٥] .

ثم نضغط على الزر [=] نحصل على الناتج بالدرجات و الدقائق و الثواني. $110°\ 11'\ 6''$

(٢)

$$\boldsymbol{360° - 75°18'48'' = (359°59'60'') - (75°18'48'') =}$$
$$\boldsymbol{(359° - 75°)(59' - 18')(60'' - 48'') = 284°41'12''}$$

حل آخر باستخدام الآلة الحاسبة:

نكتب العدد ٣٦٠ ثم نضغط على الزر [وووه] ؛ ثم نضغط على الزر [−] ، و نكتب من جديد العدد ٧٥ ثم نضغط على الزر [وووه] ؛ نكتب العدد ١٨ ثم نضغط على الزر [وووه] ؛

نكتب العدد ٤٨ ثم نضغط على الزر [وووه].

ثم نضغط على الزر [=] نحصل على الناتج بالدرجات والدقائق والثواني. $284°\ 41'\ 12''$

مثال ٢٢:

حول

(١) $\boldsymbol{\theta = 23.456°}$ إلى الشكل القياسي

(٢) $\boldsymbol{\theta = 43°25'51''}$ إلى الشكل العشري

الحــل:

(١)

$$\boldsymbol{\theta = 23.456° = 23° + 0.456° = 23° + 0.456 \times 60' = 23° + 27.36' = 23°27' + 0.36 \times 60'' = 23°27'22''}$$

من المعلوم أن:

$$\boldsymbol{1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}} \text{ و } \boldsymbol{1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}}$$

إذا:

$$\boldsymbol{\theta = 43°25'51'' = 43° + \left(\frac{25}{60} + \frac{51}{3600}\right)^{\circ} = 43.431°}$$

هناك وحدة أخرى يتم استعمالها في قياس الزوايا وتسمى الراديان (radians) وعادة ما يرمز لها بالحروف اللاتينية rd. سبق وذكرنا أن دورة كاملة تمثل زاوية قياسها $\boldsymbol{360°}$ فهنا نعرف أن قياس الدورة الكاملة = $\boldsymbol{2\pi\, rd}$ أي أن $\boldsymbol{2\pi\, rd = 360°}$ فبالتالي :

$\boldsymbol{\pi rd = 180°} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{2\pi rd = 360°}$ أو بمعنى آخر:

$$\boldsymbol{1rd = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}} \text{ أو } \boldsymbol{1° = \left(\frac{\pi}{180}\right) rd}$$

مثال ٢٣:

حول كلا مما يلي إلى درجة (°)

$$3\,rd \quad , \quad \frac{\pi}{2}rd \quad , \quad \frac{3\pi}{4}rd$$

الحــل:

$$3\,rd = 3\left(\frac{180}{\pi}\right) = 171\,°\,53\,'\,14.4\,''$$

$$\frac{\pi}{2}rd = \frac{\pi}{2}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 90°$$

$$\frac{3\pi}{4}rd = \frac{3\pi}{4}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 135°$$

مثال ٢٤:

حول كلا مما يلي إلى راديان (rd)

$$150° \quad , \quad 548°$$

الحــل:

$$150° = 150\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{5\pi}{6}rd$$

$$548° = 548\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{137\pi}{45}rd$$

بعض الزوايا المشهورة بالدرجة والراديان				
$(\circ)$	(rd)		$(\circ)$	(rd)
0	0		120	$\frac{2\pi}{3}$
30	$\frac{\pi}{6}$		180	π
45	$\frac{\pi}{4}$		240	$\frac{4\pi}{3}$
60	$\frac{\pi}{3}$		270	$\frac{3\pi}{2}$
90	$\frac{\pi}{2}$		360	2π

تمارين (٤ - ١)

تمرين ١: قم بالعمليات التالية:

1) $15°25'35'' + 43°35'27''$

2) $109°47'38'' + 43°35'21''$

3) $57°43'28'' - 27°31'49''$

4) $123°13'20'' + 27°31'49''$

تمرين ٢: أعد كتابة الزوايا التالية باستخدام وحدة الدرجة والدقيقة والثانية:

1) $40.25°$

2) $75.2°$

3) $17.45°$

4) $96.6°$

تمرين ٣: حول قياس الزوايا التالية باستخدام وحدة الدرجة:

1) $2.5\,rd$

2) 3π

3) $\frac{\pi}{2}rd$

4) $\frac{3\pi}{2}rd$

5) $-\frac{\pi}{6}rd$

6) $-6rd$

تمرين ٤: حول قياس الزوايا التالية باستخدام وحدة الراديان:

1) $45°$

2) $225°$

3) $75°$

4) $-135°$

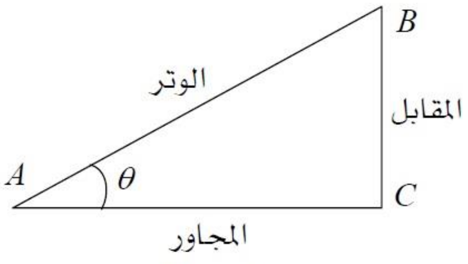
5) $7°30$

6) $-270°$

الدوال المثلثية للزاوية حادة:

عاين المثلث القائم الزاوية ABC في الشكل ٢. نسمي ضلع المثلث المقابل للزاوية القائمة C بالوتر . ولنسمي الزاوية التي رأسها A الزاوية $\boldsymbol{\theta}$، بهذا الشكليسمى الضلع $\overline{AC}$ المجاور (بالنسبة لـ $\boldsymbol{\theta}$)، ويسمى الضلع $\overline{BC}$ المقابل (بالنسبة لـ $\boldsymbol{\theta}$). يطلق على الدوال المثلثية للزاوية $\boldsymbol{\theta}$ الأسماء التالية:

sine, cosine, tangent, cotangent, cosecant and secant



الشكل 2

يرمز لقيم هذه الدوال المثلثية عند $\boldsymbol{\theta}$بـ: $\tan\boldsymbol{\theta}$, $\cos\boldsymbol{\theta}$, $\sin\boldsymbol{\theta}$ ...إلخ.

وتعرف هذه القيم باستخدام طول أضلاع المثلث كالتالي:

$$\sin\boldsymbol{\theta} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\boldsymbol{BC}}{\boldsymbol{AB}}$$

$$\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{AB}}$$

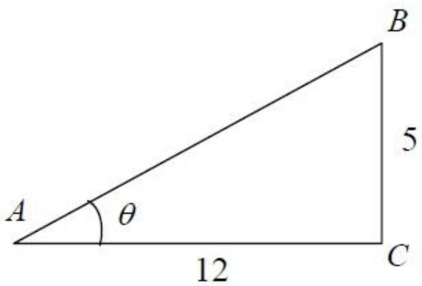
$$\tan\boldsymbol{\theta} = \frac{\sin\boldsymbol{\theta}}{\cos\boldsymbol{\theta}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\boldsymbol{BC}}{\boldsymbol{AC}}$$

مثال ٢٥:

احسب قيم الدوال المثلثية للزاوية $\boldsymbol{\theta}$ في الشكل التالي:

الحــل:

نحتاج إلى إيجاد طول الوتر وهذا ممكن باستخدام قانون فيثاغورث للمثلث القائم الزاوية ABC.



$$\boldsymbol{AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow AB = \sqrt{169} = 13}$$

ومنه تكون قيم الدوال المثلثية للزاوية θ كالتالي:

$$\sin\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13}$$

$$\cos\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13}$$

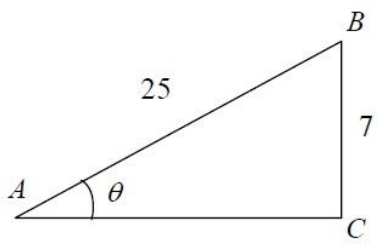
$$\tan\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{12}$$

مثال ٢٦:

أوجد قيمة $\cos\theta$ و $\tan\theta$ علما بأن $\sin\theta = \frac{7}{25}$.

الحـــــل:

لأن $\sin\theta = \frac{7}{25}$ فيمكن افتراض أن $BC = 7$ و $AB = 25$.



ومن قانون فيثاغورث:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 \Longrightarrow AC^2 = 25^2 - 7^2 = 576 \Longrightarrow AC = \sqrt{576} = 24$$

وبالتالي:

$$\cos\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{24}{25}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{24}$$

الدوال المثلثية لبعض الزوايا المشهورة

كثير ما نتعرض في حساب المثلثات إلى زوايا تتكرر معنا كثيرا يجب على المتدرب أن يحفظ قيم دوالها المثلثية.

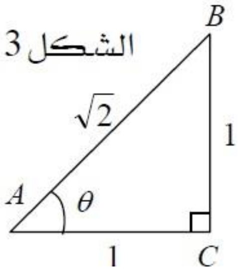
في هذه الفقرة سنكتفي بشرح طريقة إيجاد قيم الدوال المثلثية للزاوية $45°$ فقط وباقي الزوايا المشهورة سنذكر فقط قيم مثلثاتها بدون شرح.

لنعاين المثلث القائم الزاوية ABC في (الشكل ٣) حيث تكون فيه الزاوية A تساوي $45°$. من السهل استنتاج أن الزاوية B تساوي كذلك $45°$ وبالتالي يكون المثلث ABC متساوي الضلعين BC و AC .

لنفرض أن $AC = BC = 1$ وبتطبيق قانون فيثاغورث يكون:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Longrightarrow AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Longrightarrow AB = \sqrt{2}$$

وبالتالي:



الشكل 3

$$\sin\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{1} = 1$$

مثلّثيات زوايا مشهورة			
$\theta\,(^\circ, rd)$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$30^\circ, \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^\circ, \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60^\circ, \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

حل الدوال المثلثية للمثلث القائم الزاوية

يتكون شكل المثلث من ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا. لنفرض أننا نعرف قياس بعض الأضلاع وبعض الزوايا.

فعملية إيجاد قياس الأضلاع والزوايا الباقية تسمى حل المثلث.

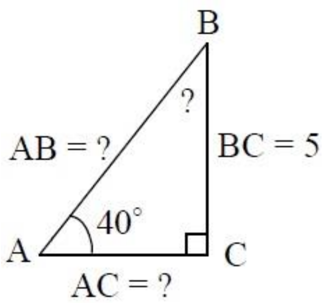
وسنتطرق في الأمثلة التالية إلى كيفية استخدام علم المثلثات في حل مسائل من هذا النوع.

مثال ٢٧:

حل المثلث القائم الزاوية ABC حيث الزاوية التي رأسها C زاوية قائمة. $BC = 5$ والزاوية التي رأسها A تساوي $40°$.

أولا: نقوم برسم المثلث على حسب المعطيات في السؤال كما هو مبين في الرسم التالي:

فمن الواضح أنه يجب علينا إيجاد الزاوية B والأضلاع AC وAB مع العلم أن الزاوية القائمة C تساوي $90°$.



بما أن مجموع زوايا المثلث يساوي $180°$ إذن :

$$B = 180° - (A° + C°) = 180° - (40° + 90°) = 50°$$

(هنا نقصد الزوايا التي رؤوسها A, B, C) ومنه باستخدام الدوال المثلثية :

$$\sin 40° = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{AB} \Rightarrow AB = \frac{5}{\sin 40°} = \frac{5}{0.6427} \Rightarrow AB = 7.8$$

يبقى علينا إيجاد طول الضلع AC الذي يمكن حسابه باستخدام قانون فيثاغورث أو إحدى الدوال المثلثية المناسبة. وبقانون فيثاغورث:

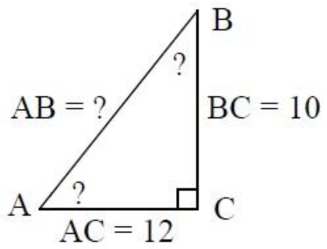
$$AC^2 = AB^2 - BC^2 \Rightarrow AC^2 = (7.8)^2 - 5^2 = 60.84 - 25 = 35.84 \Rightarrow AC = \sqrt{35.84}$$

وهكذا تصبح قياس كل زوايا وأضلاع المثلث معروفة.

مثال ٢٨:

حل المثلث القائم الزاوية في C حيث $AC = 12$ و $BC = 10$.

الحــل:



هنا في هذه الحالة المعطيات هما ضلعان. فبالنسبة للضلع الثالث AB يمكن استخدام قانون فيثاغورث:

$$\boldsymbol{AB^2 = AC^2 + BC^2 \Longrightarrow AB^2 = 12^2 + 10^2 = 244 \Longrightarrow AB = \sqrt{244} = 15.6}$$

وباستخدام الدالة المثلثية **tan** نحسب الزاوية $A°$:

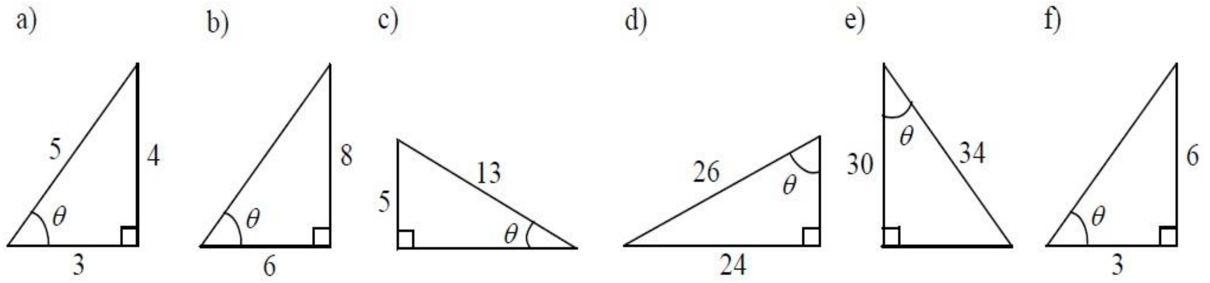
$$\boldsymbol{\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{10}{12} = 0.8333 \Longrightarrow A° = 39°48'}$$

والزاوية $B°$ يمكن حسابها من أن مجموع زوايا المثلث يساوي $180\,°$ إذن:

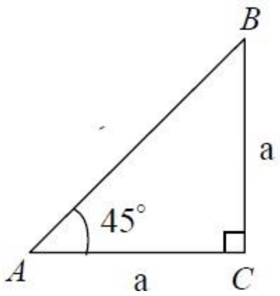
$$\boldsymbol{B = 180\,° - (A° + C°) = 180° - (39°48' + 90°) = 180\,° - 129°48'}$$
$$\boldsymbol{= 50°12'}$$

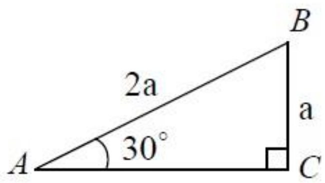
تمارين (٤ - ٢)

تمرين ١: أوجد القيم $\cos\theta \ \sin\theta \ \tan\theta$, في الحالات الآتية:



تمرين ٢: استخدم الشكلين التاليين $\cos 45° \ \sin 30°, \cos 30° \ \sin 45°$,





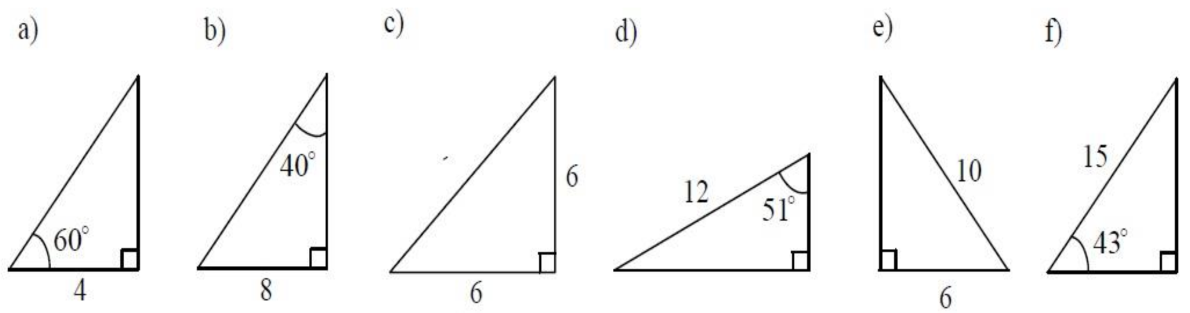
تمرين ٣:

١. أوجد قيمة $\cos\theta$ و $\tan\theta$ علما بأن $\sin\theta = \frac{12}{13}$

٢. أوجد قيمة $\sin\theta$ و $\tan\theta$ علما بأن $\cos\theta = \frac{1}{2}$

٣. أوجد قيمة $\cos\theta$ و $\sin\theta$ علما بأن $\tan\theta = \frac{2}{3}$

تمرين ٤: أوجد قيم الزوايا والأضلاع غير المعروفة في الحالات الآتية:



الدوال المثلثية لأي زاوية

هنا في هذه الفقرة سنعرف الدوال المثلثية لأي زاوية بحيث يكون هذا التعريف شاملا لتعريف الدوال المثلثية للزاوية الحادة التي سبق وتكلمنا عنها. لهذا الغرض لنفرض الزاوية $\boldsymbol{\theta}$ في شكلها القياسي (أي رأس الزاوية على نقطة الأصل وضلعها الابتدائي ينطبق على الجزء الموجب للمحور X) (الشكل ١) وإذا كانت النقطة $\boldsymbol{P}(x, y)$.

(تختلف عن نقطة الأصل) على الضلع النهائي للزاوية $\boldsymbol{\theta}$.

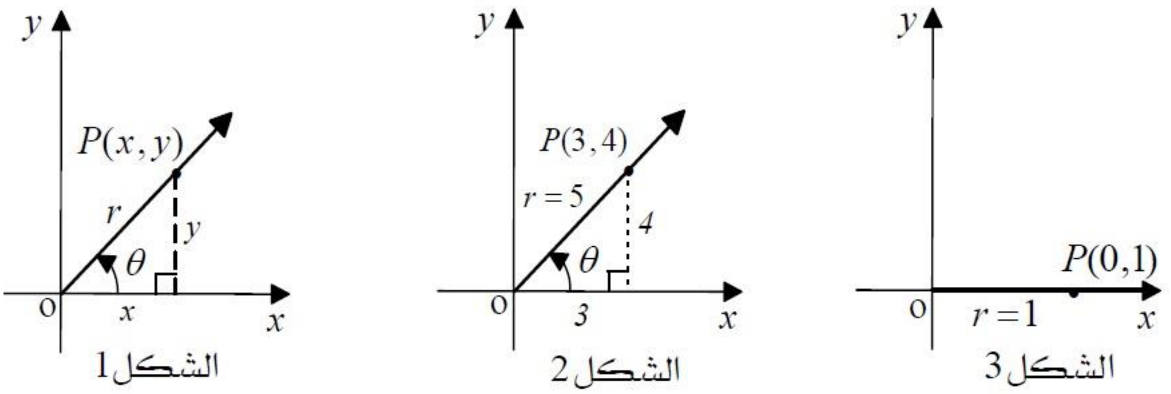
من قانون فيثاغورث:

$\boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}$ و تعرف مثلثيات $\boldsymbol{\theta}$ باستخدام الإحداثيات (x, y) والمسافة $\boldsymbol{r}$ كالتالي :

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



مثال ٢٩:

إذا كانت النقطة $\boldsymbol{P}(3,4)$ |(الشكل ٢) على الضلع النهائي للزاوية $\boldsymbol{\theta}$ فأوجد الدوال المثلثية لـــ $\boldsymbol{\theta}$

الحـــل:

$$\boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sin\boldsymbol{\theta} = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{x}{r} = \frac{3}{5}$$

$$\tan\boldsymbol{\theta} = \frac{y}{x} = \frac{4}{3}$$

مثال ٣٠:

أوجد الدوال المثلثية للزاوية $\theta^\circ = 0^\circ$.

الحـــل:

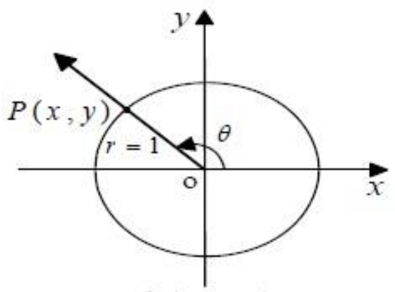
في هذه الحالة لنختار النقطة $P(1,0)$ (الشكل ٣) فمن الواضح إن $r = OP = 1$ و بالتالي :

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

يمكن اختصار تعريف الدوال المثلثية باختيار النقطة P على دائرة الوحدة (الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها يساوي ١) التي تتقاطع مع ضلع الزاوية ، أو بمعنى آخر اختيار P بحيث $r = OP = 1$ (الشكل ٤) فبالتالي :



الشـــكل 4

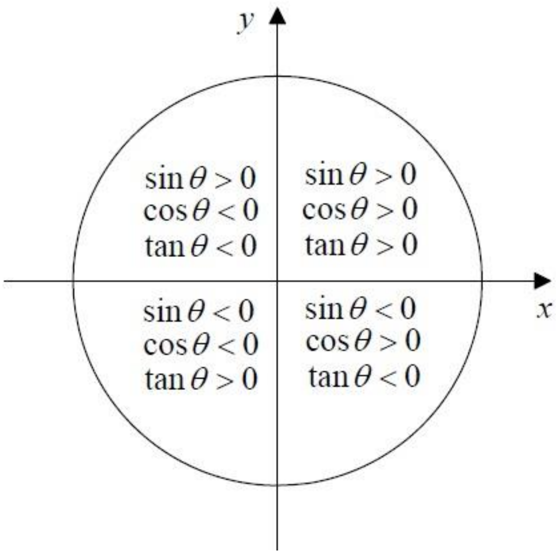
$$\sin\theta = y$$

$$\cos\theta = x$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

وبما أن قيمتي x و y محصورتين بين -1 و 1 فإن :

$$-1 \le \sin\theta \le 1 \quad \text{و} \quad -1 \le \cos\theta \le 1$$



ومن هذا التعريف يمكن معرفة إشارة هذه الدوال المثلثية *tangent* , *cosine* , *sine* كالتالي:

- إذا كانت الزاوية $\boldsymbol{\theta}$ في الربع الأول تكون قيم $\boldsymbol{\tan\theta}$, $\boldsymbol{\cos\theta}$, $\boldsymbol{\sin\theta}$ موجبة .
- إذا كانت الزاوية $\boldsymbol{\theta}$ في الربع الثاني تكون قيمة $\boldsymbol{\sin\theta}$ موجبة و قيم $\boldsymbol{\tan\theta}$, $\boldsymbol{\cos\theta}$ سالبة.
- إذا كانت الزاوية $\boldsymbol{\theta}$ في الربع الثالث تكون قيم $\boldsymbol{\cos\theta}$, $\boldsymbol{\sin\theta}$ سالبة وقيمة $\boldsymbol{\tan\theta}$ موجبة.
- إذا كانت الزاوية $\boldsymbol{\theta}$ في الربع الرابع تكون قيم $\boldsymbol{\tan\theta}$, $\boldsymbol{\sin\theta}$ سالبة وقيمة $\boldsymbol{\cos\theta}$ موجبة.

تمارين (٤ - ٣)

تمرين ١:

أوجد الدوال المثلثية للزاوية $\theta°$ عندما تكون إحداثيات النقطة P على الضلع النهائي للزاوية :

$1)\ P(2,3)$

$2) P(3,-4)$

$3) P(1,\sqrt{3})$

$4) P(1,2\sqrt{2})$

$5) P(2,0)$

تمرين ٢:

أوجد قيم $\tan\theta\ \sin\theta \cos\theta$, عندما تكون الزاوية $\theta°$ تساوي :

$1) 180°$

$2) 360°$

$3)\ \frac{3\pi}{2}$

$4)\ -\pi$

تمرين ٣:

أوجد إشارة قيم الدوال المثلثية التالية:

$1)\ \sin\frac{3\pi}{2}$

$2)\ \cos 60°$

$3)\ \tan 120°$

$4)\ \sin 270°$

$5)\ \cos 120°$

تمرين ٤:

أوجد القيم الحقيقية للدوال المثلثية $\tan, \sin, \cos$, للزوايا التالية:

$1)120^\circ$

$2)135^\circ$

$3)210^\circ$

$4)\frac{5\pi}{3}$

$5)\frac{7\pi}{4}$

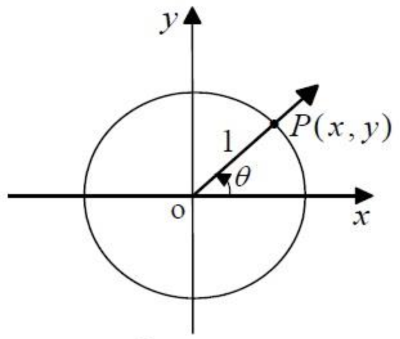
$6)-30^\circ$

$7)-\frac{\pi}{4}$

$8)-150^\circ$

متطابقات الدوال المثلثية

كما رأينا من قبل باستخدام دائرة الوحدة والنقطة $P(x, y)$ (الشكل ٥) توصلنا إلى أن :



الشكل 5

$$\sin\theta = y$$

$$\cos\theta = x$$

ومنه يمكن أن نقول:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = x^2 + y^2$$

ومع أن:

$$x^2 + y^2 = r^2 = 1$$ (دائرة الوحدة)

إذا:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

(وهذا يصلح لأي زاوية θ)

فمثلا:

$$\sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

مثال ٣١:

إذا كانت $\sin\theta = \frac{2}{3}$ و الزاوية θ موجودة في الربع الثاني. استخدم المتطابقة الأساسية لإيجاد $\cos\theta$.

الحـــل:

من التطابق الأساسي:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

ولأن الدالة المثلثية $\cos\theta$ سالبة في الربع الثاني نختار $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

كذلك يمكن أن نستخدم هذه المتطابقات في اختصار العبارات المثلثية كما في المثال التالي:

مثال ٣٢:

اختصر العبارة التالية : $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$

الحـــل:

أولا: نقوم بتفكيك الأقواس كالتالي:

$$(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) = 1^2 - \sin^2\theta = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$$

متطابقات مجموع وحاصل طرح زاويتين

من التعريف السابق يمكن الوصول إلى متطابقات أخرى سنسردها هنا بدون شرح طريقة الوصول إليها.

1) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

2) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

3) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

4) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

5) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

6) $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

مثال ٣٣:

إذا كانت β و α زاويتين حادتين وكان $\cos\beta = \frac{12}{13}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ أوجد ما يلي:

$$\sin(\alpha+\beta)$$
$$\cos(\alpha-\beta)$$
$$\tan(\alpha+\beta)$$

الحـــل:

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}$$

$$\cos\beta = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta \Rightarrow \sin^2\beta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2\beta = 1 - \frac{144}{169} \Rightarrow$$

$$\sin^2\beta = \frac{25}{169} \Rightarrow \sin\beta = \frac{5}{13} \quad \Rightarrow \tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{5}{12}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \left(\frac{3}{5}\right)\times\left(\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\times\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{56}{65}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \left(\frac{4}{5}\right)\times\left(\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\times\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{63}{65}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{5}{12}\right)} = \frac{56}{33}$$

تمارين (٤ - ٤)

تمرين ١:

إذا كانت θ زاوية حادة بحيث $sin\,\theta = \frac{24}{25}$. أوجد $cos\,\theta$ و $\tan\theta$

تمرين ٢:

إذا كانت الزاوية θ في الربع الثاني بحيث $\tan\theta = -\frac{3}{4}$. أوجد $cos\,\theta$ و $sin\,\theta$.

تمرين ٣:

اذا كانت α،β زاويتين حادتين وكان:

$$\sin(\alpha) = \frac{12}{13}$$

$$\cos(\beta) = \frac{4}{5}$$

أوجد:

$$\sin(\alpha+\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)$$

$$\tan(\alpha+\beta)$$

تمرين ٤:

ليكن $\cos\beta = \frac{7}{25}$, $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ حيث α موجودة في الربع الثالث و β في الربع الأول .

أوجد قيم : $a)\ \sin(\alpha+\beta)$ $b)\ \tan(\alpha+\beta)$

تمرين ٥:

أوجد القيم الحقيقية للدوال المثلثية التالية:

1. $cos\frac{3\pi}{4}$
2. $sin\frac{2\pi}{3}$
3. $cos\frac{4\pi}{3}$
4. $sin\frac{7\pi}{12}$
5. $tan\frac{7\pi}{6}$
6. $sin\,240°$
7. $cos\,210°$

الباب الخامس: التفاضل والتكامل

الأهداف

١. أن يتعرف الطالب علي المفاهيم الأساسية والرموز والتعبيرات الرياضية الخاصة بالدالة.
٢. أن يدرك الطالب المعني الحياتي للدالة.
٣. أن يستنتج الطالب مجال الدالة وبعض قيم الدالة عند قيم معينة للمتغير المستقل.
٤. أن يدرك الطالب أهمية مفهوم النهاية في تطور علم الرياضيات.
٥. أن يكون الطالب قادرا على إيجاد نهايات بعض الدوال.
٦. أن يتعرف الطالب علي أهمية الاشتقاق (التفاضل) في التطبيقات العملية.
٧. أن يكون الطالب قادرا على إيجاد المشتقة الأولي باستخدام نظريات الاشتقاق.

الدالة Function

مقدمة:

كثير من المتغيرات في الطبيعة والهندسة تعتمد على كمية متغيرة أخرى. ويمكن أن نوضح مفهوم الدالة بالأمثلة التالية:

مساحة المربع تعتمد على طول ضلعه.

أي أن لكل طول ضلع توجد مساحة للمربع، وبذلك تكون مساحة المربع دالة لطول الضلع.

محيط الدائرة يعتمد على طول نصف قطرها.

أي أن لكل طول نصف قطر يوجد محيط للدائرة، وبذلك يكون محيط الدائرة دالة لطول نصف قطر الدائرة.

أيضا في الحركة المنتظمة للأجسام.

المسافة المقطوعة تعتمد على الزمن، فلكل قيمة من قيم الزمن توجد قيمة من قيم المسافة. وتكون المسافة دالة للزمن.

ومن ذلك يتضح أن إذا كانت كمية Y تتغير مع تغير الكمية X بحيث يكون لكل قيمة من قيم X قيمة عددية واحدة فقط للكمية Y، فإن Y تسمى دالة لــ (X) وتكتب $y = f(x)$.

مثال ٣٤:

$y = 2x + 1$

أي أن

$f(x) = 2x + 1$

نلاحظ أن لكل قيمة من قيم X العددية نحصل على قيمة واحدة فقط للمتغير Y. وتسمى X المتغير المستقل، و Y المتغير التابع.

إذا كانت K و L مجموعتين غير خاليتين فإن العلاقة من K إلى L تسمى دالة إذا كل عنصر من عناصر K بعنصر واحد فقط من عناصر L.

- تسمى المجموعة K مجال الدالة (وهي مجموعة القيم التي يمكن أن تأخذها X).
- وتسمى المجموعة L المجال المقابل (وهي المجموعة التي يأخذ منها Y قيمة).
- أما مدى الدالة فهي مجموعة جزئية من المجموعة L.

الدالة الحقيقية: تسمى الدالة دالة حقيقية إذا كان كل من المجال والمجال المقابل هي مجموعة الأعداد الحقيقية. ويرمز لها بالتعبير الرياضي $f: R \longrightarrow R$.

تعيين مجال الدالة: والمقصود به تعيين مجموعة القيم العددية التي يأخذها المتغير المستقل.

مثال ٣٥:

إذا كان $f(x) = \frac{x^2+5}{x}$

فإن مجالها $f: R \longrightarrow R - \{0\}$

مثال ٣٦:

إذا كان $f(x) = \frac{x+1}{x-5}$ عين مجال الدالة

المقام = صفر عند $x - 5 = 0$ أي عند $x = 5$

بالتالي مجال الدالة $f: R \longrightarrow R - \{5\}$

مثال ٣٧:

إذا كان $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-9}$ عين مجال الدالة

عند $x^2 - 9 = 0$ أي $x = \pm 3$

بالتالي مجال الدالة $f: R \longrightarrow R - \{-3 , 3\}$

تمارين (٥ - ١)

أذكر مجال الدوال الآتية:

$$1)\ f(x) = \frac{2x}{x-2}$$

$$2)\ f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4}$$

$$3)\ f(x) = \frac{x+5}{x^2+9}$$

النهايات

يعتبر مفهوم النهاية هو أساس علم التفاضل والتكامل، وسوف نكتفي بالإشارة إلى نهاية الدالة عند نقطة (عدد حقيقي) ولا يتم التطرق إلى النهاية عند اللانهاية (∞) وذلك للتبسيط.

في السابق علمت أن:

إذا كان $f(x) = \frac{x^2+x}{x}$

فإن مجالها $f: R \longrightarrow R - \{0\}$

أي أن الدالة غير معرفة عند $x = 0$ وسنحاول معرفة قيمة $f(x)$ عندما تقترب x من الصفر:

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$f(x)$	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001

نلاحظ أن كلما اقتربت قيمة x من الصفر، تقترب قيمة $f(x)$ من واحد 1.

أي أن نهاية $f(x) = 1$ عندما تقترب x من الصفر.

وتكتب

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

و تقرأ " نهاية $f(x)$ عندما x تؤول إلى صفر تساوي واحد ".

لا يمكن اعتبار الطريقة السابقة طريقة صحيحة لحساب النهايات بل هي مجرد طريقة لتوضيح الفكرة و ذلك لأن كثير من الدوال تأخذ سلوكا غير متوقعا عند نقطة معينة و بالتالي هناك طرق رياضية لحساب النهاية كما يتضح فيما بعد.

مما سبق يمكن تعريف النهاية كالآتي:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

يكون العدد الحقيقي b نهاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من a.

إذا وجد لكل عدد صغير موجب h_1 عدد صغير موجب h_2

بحيث $|f(x) - b| < h_1$ لكل $|x - a| < h_2$

وهذا التعريف يضمن تقارب x من a من الجهتين أي $x < a$, $x > a$

كذلك تقارب $f(x)$ من b من الجهتين أي $f(x) < b$, $f(x) > b$.

حساب نهاية الدالة عند نقطة

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

حيث a عدد حقيقي

يتم استخدام التعويض المباشر بحساب $f(a)$ فتتحقق حالة من الحالات التالية:

$$f(a) = \text{عدد حقيقي يكون هو قيمة النهاية}$$

$$a\ f(a) = \frac{\text{عدد حقيقي} \neq \text{صفر}}{\text{صفر}} \quad \text{لا توجد نهاية للدالة عند}$$

$$f(a) = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

نحلل كل من البسط والمقام لاختصار العامل الصفري $(x-a)$ ثم التعويض للحصول على قيمة النهاية.

مثال ٣٨:

أوجد قيمة:

$$\lim_{x\to 3}(x+1)$$

الحـــــل:

$$\lim_{x\to 3}(x+1) = 3+1 = 4$$

مثال ٣٩:

أوجد قيمة:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}$$

الحـــــل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x} = \frac{0+0}{0} = \frac{0}{0}$$

لحذف العامل الصفري: نستخدم التحليل بأخذ العامل المشترك.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{x} = \lim_{x\to 0} x+2 = 0+2$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x} = 2$$

مثال ٤٠:

أوجد قيمة:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x}{x} = \frac{2+1}{2-2} = \frac{3}{0}$$

$\therefore$ ليس لها نهاية.

مثال ٤١:

أوجد قيمة:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

الحـــــل:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

نستخدم تحليل فرق ما بين مربعين:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 1+1 = 2$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

مثال ٤٢:

أوجد قيمة:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-9}$$

الحـــــل:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{3^2-(3\times 3)}{3^2-9} = \frac{0}{0}$$

بتحليل البسط والمقام:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \lim_{x \to 3} \frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x}{(x+3)} = \frac{3}{3+3} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x \to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{1}{2}$$

تمارين (٥ - ٢)

أوجد قيمة كل من النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x \to 5} x^2 + 1$

2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x}{x+1}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x}{x}$

4) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$

5) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 2}{x}$

7) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

8) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4 - x}{x + 1}$

الاشتقاق

إيجاد مشتقة دالة له تطبيقات هامة في الرياضيات والهندسة والميكانيكا والفيزياء والاقتصاد.

وفيما يلي بعض المجالات التي نستخدم فيها الاشتقاق:

- إيجاد القيم العظمى والصغرى للدوال.
  - وبالتالي يمكن حساب أعلى ربح أو أقل تكلفة.
  - كذلك حساب أقل مادة مستخدمة لصنع إناء أو مجسم بحجم معين.
  - كذلك تعطي فكرة واضحة لشكل منحنى الدالة.
- إيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند أي نقطة وبالتالي معرفة معادلة المماس.
- إيجاد تقوس منحنى الدالة عند أي نقطة.
- وفي مجال الفيزياء فإن المشتقة تعبر عن معدل التغير اللحظي وبالتالي فهي تستخدم لوصف العلاقة بين المسافة والزمن لحساب السرعة.
- كما تستخدم في العلاقات التي تصف معدلات التمدد الطولية أو السطحية أو الحجمية للأجسام عند تعرضها للحرارة.

تغير الدالة

إذا كانت $y = f(x)$ عندما تتغير x من x إلى $x + h$

فإن $f(x)$ تتغير من $f(x)$ إلى $f(x + h)$

وبالتالي يكون التغير في قيمة الدالة هو الفرق بين القيمة النهائية والقيمة الابتدائية.

أي أن $\Leftarrow$ **التغير في** $f(x)$ $= f(x + h) - f(x)$

أما التغير في قيمة المتغير المستقل $= (x + h) - x$

أي أن $\Leftarrow$ **التغير في قيمة المتغير المستقل** $= \boldsymbol{h}$

متوسط التغير: $d(x)$

هو النسبة بين التغير في المتغير التابع والتغير في المتغير المستقل.

أي أن:

$$\boldsymbol{d(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

معدل التغيير

معدل التغير هو حساب نهاية متوسط التغير:

$$\lim_{h\to 0} d(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

و هو ما يسمى بمشتقة الدالة.

مثال توضيحي:

إيجاد مشتقة الدالة بواسطة التعريف.

أوجد مشتقة الدالة.

$$f(x) = 2x + 5$$

$$f(x+h) = 2(x+h) + 5$$

$$f(x+h) = 2x + 2h + 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$f(x) = 2x + 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . . (2)$$

$$\therefore f(x+h) - f(x) = 2x + 2h + 5 - (2x+5) = 2h$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2h}{h}$$

بالتعويض المباشر ينتج $\frac{0}{0}$، باختصار المعامل الصفري.

$$\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} = h$$

و هي قيمة مشتقة الدالة.

الرموز والتعبيرات الرياضية المستخدمة في الاشتقاق

اذا كانت $y = f(x)$ فان مشتقة الدالة يرمز لها.

بالرمز $f\grave{}(x)$

أو الرمز $\grave{y}$.

أو الرمز $\frac{dy}{dx}$.

نظريات الاشتقاق

من الواضح أن استخدام التعريف $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2h}{h}$ لإيجاد المشتقة يتطلب وقتا كبيرا ويزداد صعوبة كلما ذادت درجة الدالة حتى يستحيل استخدامه لإيجاد المشتقة وبالتالي تستخدم النظريات التالية كأساس لحساب المشتقة.

نظرية (١)

اذا كان $f(x) = x^n$

فان $f(\grave{x}) = nx^{n-1}$

نتيجة

إذا كان $f(x) = x$

فان $f(\grave{x}) = 1$

نظرية (٢)

إذا كان $f(x) = af_1(x)$ حيث $a \in R^*$

فإن $f(\grave{x}) = af_1(\grave{x})$

نظرية (٣)

إذا كان $F(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$

فإن $F(\grave{x}) = f_1(\grave{x}) + f_2(\grave{x}) + f_3(\grave{x})$

أي أن مشتقة المجموع الجبري لعدة دوال تساوي المجموع الجبري لمشتقات هذه الدوال.

مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفر

أمثلة على الاشتقاق

مثال ٤٣:

أوجد مشتقة للدالة

$$f(x) = 2x^3 + 5x + 6$$

الحـــــل:

$$f(\grave{x}) = 3 \times 2x^{3-1} + 5 \times x^{1-1} + 0$$

$$f(\grave{x}) = 6x^2 + 5$$

مثال ٤٤:

أوجد $\grave{y}$ إذا كان:

$$y = 8x - 5x^2$$

الحـــــل:

$$\grave{y} = 1 \times 8x^{1-1} - 2 \times 5x^{2-1}$$

$$\grave{y} = 8 - 10x$$

تمارين (٥ - ٣)

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $f(x) = x^3 + 2x + 5$

2) $f(x) = 2x^2 + 3$

3) $f(x) = 8$

4) $f(x) = -3x^2 + 3x^3 - x$

5) $f(x) = 5x^2 - x^4$

6) $f(x) = x$

7) $f(x) = -x$

مشتقة حاصل ضرب دالتين

إذا كان $\boldsymbol{F(x) = f_1(x) \times f_2(x)}$

فإن $\boldsymbol{F\grave{}(x) = f_1\grave{}(x) \times f_2(x) + f_1(x) \times f_2\grave{}(x)}$

أي أن مشتقة حاصل ضرب دالتين تساوي

مشتقة الدالة الأولى × الدالة الثانية + الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية

مثال ٤٥:

إذا كان $\boldsymbol{F(x) = (2x^2 - 1) \times (7x + 8)}$

فأوجد $F\grave{}(x)$

الحـــل:

$$\boldsymbol{F\grave{}(x) = 4x(7x + 8) + (2x^2 - 1) \times 7}$$

$$\boldsymbol{F\grave{}(x) = 28x^2 + 32x + 14x^2 - 7}$$

$$\boldsymbol{F\grave{}(x) = 42x^2 + 32x - 7}$$

مشتقة خارج قسمة دالتين

إذا كان $F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

فإن $F\grave{}(x) = \frac{f_1\grave{}(x) \times f_2(x) - f_2\grave{}(x) \times f_1(x)}{[f_2(x)]^2}$

أي أن مشتقة خارج قسمة دالتين تساوي:

$$\frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال ٤٦:

أوجد ỳ إذا كان:

$$y = \frac{2x}{3x-2}$$

الحـــل:

$$\grave{y} = \frac{2 \times (3x-2) - 3 \times 2x}{(3x-2)^2}$$

$$\grave{y} = \frac{6x - 4 - 6x}{(3x-2)^2}$$

$$\grave{y} = \frac{-4}{(3x-2)^2}$$

تمارين (٥ - ٤)

١. أوجد تفاضل كلا من الدوال التالية:

$$F(x) = (x^2 - 1) \times (2x + 3)$$

$$F(x) = (x + 2) \times (2x^3 - 6)$$

٢. أوجد المشتقة الأولى لكل دالة من الدوال التالية:

$$F(x) = \frac{2x + 5}{x}$$

$$F(x) = \frac{2x}{3x + 1}$$

التكامل Integration

تمهيد

نعلم أن عملية الطرح هي العملية العكسية لعملية الجمع وأيضا فان عملية القسمة هي العملية العكسية للضرب وكذلك فان التكامل هو العملية العكسية للتفاضل.

و هو العملية التي بواسطتها نحصل على الدالة التفاضلية الأصلية عن طريق معرفة مشتقاتها.

فإذا كان لدينا الدالة Function:

$$y = x^3$$

فان:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

ولكن لنفترض أن لدينا:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

فإنه باستخدام التكامل يمكننا إيجاد الدالة الأصلية وهي y و هنا سنكتب بالطريقة الآتية:

$$y = \int 3\,x^2\,dx = x^3$$

وتقرأ تكامل $3x^2$ بالنسبة لـ x

التكامل غير المحدود Indefinite Integral

في المثال السابق كان لدينا:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

و هي قد تكون المشتقة التفاضلية لأكثر من دالة، فقد تكون الدالة الأصلية:

$$y = x^3$$

أو:

$$y = x^3 - 5$$

أو:

$$y = x^3 + 8$$

وذلك لأن المشتقة الأولى للمقدار الثابت = صفر وحيث أننا لا نعلم هنا المقدار الذي قد تحتوي عليه الدالة (y) عند إجراء التكامل، لذلك فإننا نكتب:

$$y = \int 3\,x^2\,dx = x^3 + C$$

حيث "C" ثابت التكامل، ويسمى التكامل في هذه الحالة بالتكامل غير المحدود.

ويشمل الجانب الأيسر علاقة التكامل (∫)، (dx) وهو يعني التكامل بالنسبة لـ x أما الطرف الأيمن فيشمل ناتج الكامل + ثابت التكامل.

ويمكن كتابة التكامل السابق كما يلي:

$$y = \int 3\,x^2\,dx = f(x) + C$$

القواعد الأساسية للتكامل

القاعدة (١): تكامل الثابت

$$y = \int A\,dx = Ax + C$$

حيث "A" هو الحد الثابت، "C" ثابت التكامل.

حالة خاصة:

إذا كان "A=1" فتكتب القاعدة

$$y = \int dx = x + C$$

مثال ٤٧:

أوجد:

1- $\int 5\,dx$

2- $\int -10\,dx$

الحل:

1- $\int 5\,dx = 5x + C$

2- $\int -10\,dx = -10x + C$

القاعدة (٢): تكامل حد جبري مرفوع لقوة أسية وله معامل

$$y = \int Ax^n\,dx = \frac{Ax^{n+1}}{n+1} + C$$

حيث "n ≠ -1"

مثال ٤٨:

أوجد:

1- $\int x\,dx$

2- $\int x^2\,dx$

3- $\int x^{-3}\,dx$

الحل:

1- $y = \int x\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$

2- $y = \int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$

3- $y = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C$

القاعدة (٣): تكامل الحد الثابت المضروب فى الدالة

$$y = \int Af(x)dx = A\int f(x)\,dx =$$

مثال ٤٩:

أوجد:

1- $\int 6x^2\,dx$

2- $\int 15x^{-4}\,dx$

3- $\int \frac{1}{4}x^{\frac{-1}{3}}\,dx$

الحل:

1- $\int 6x^2\,dx = 6\int x^2\,dx = 6\,\frac{x^{2+1}}{2+1} + C = 6\frac{x^3}{3} + C = 2x^3 + C$

2- $\int 15x^{-4}\,dx = 15\int x^{-4}\,dx = 15\,\frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = 15\frac{x^{-3}}{-3} + C = -5x^{-3} + C$

3- $\int \frac{1}{4}x^{\frac{-1}{3}}\,dx = \frac{1}{4}\int x^{\frac{-1}{3}}\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{1}{4}\,\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{8}x^{\frac{2}{3}} + C$

القاعدة (٤): تكامل مجموع أو حاصل طرح دالتين أو أكثر

$$y = \int (f1(x) \pm f2(x))dx = \int f1(x)dx \pm \int f2(x)dx =$$

مثال ٥٠:

أوجد:

$$\int (x^2 + 6x)\, dx$$

الحل:

$$= \int (x^2 + 6x)\, dx = \int x^2\, dx + \int 6x\, dx$$

$$= \int x^2\, dx + \int 6x\, dx = \frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + C$$

مثال ٥١:

أوجد:

$$y = \int (12x^3 + 15x^2 + 2)\, dx$$

أوجد التكامل عندما يكون:

x = 1

y = 14

الحل:

$$y = \int (12x^3 + 15x^2 + 2)\, dx = \int 12x^3\, dx + \int 15x^2\, dx + \int 2\, dx$$

$$y = 12\frac{x^4}{4} + 15\frac{x^3}{3} + 2\,x + C$$

$$y = 3x^4 + 5x^3 + 2\,x + C$$

وبالتعويض بقيم (x,y):

$$14 = 3(1^4) + 5(1^3) + 2\,(1) + C$$

$$14 = 3 + 5 + 2\; + C$$

$$C = 4$$

ومنه نستنتج أن ناتج التكامل:

$$y = 3x^4 + 5x^3 + 2\,x + 4$$

التكامل المحدود Definite Integration

إذا أوجدنا تكامل الدالة:

$$y = f(x)$$

بالنسبة إلى "x = a" ثم أوجدنا نفس التكامل إذا كانت "x = b" فإن قيمة الدالة "y" عندما تتغير قيمة "x" من "a: b" هو التكامل المحدود، ويمكن كتابة التكامل المحدود للدالة السابقة كما يلي:

$$y = \int_{a}^{b} f(x)dx = [\,f(x)]_{a}^{b} = f(b) - f(a)$$

ويسمى الطرف الأيسر بتكامل "f(x)" من "a:b" بالنسبة إلى "x"، ويسمى "a,b" بحدي التكامل حيث "b" هو الحد الأعلى، و "a" هو الحد الأدنى، بينما يمثل الطرف الأيمن الفرق بين ناتج التكامل ويلاحظ أنه لا يوجد ثابت للتكامل في هذا المقدار.

مثال ٥٢:

أوجد:

$$y = \int_{1}^{3} x^2 dx$$

الحل:

الحد الأدنى = ١ بينما الحد الأعلى ٣

$$y = \int_{1}^{3} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{3} = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

مثال ٥٣:

أوجد:

$$y = \int_{-1}^{2} (x^2 + 6x)dx$$

الحل:

الحد الأدنى = (-١) بينما الحد الأعلى (٢)

$$y = \int_{-1}^{2} (x^2 + 6x)dx = \int_{-1}^{2} x^2 dx + \int_{-1}^{2} 6x dx$$

$$y = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} + \left[6\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}$$

$$y = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} + [3\,x^2]_{-1}^{2}$$

$$y = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{-1^3}{3}\right) + (3(2)^2 - 3(-1)^2)$$

$$y = \left(\frac{8}{3} - \frac{-1}{3}\right) + \left(3(4) - 3(1)\right)$$

$$y = \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right) + (12 - 3)$$

$$y = \left(\frac{9}{3}\right) + 9 = 3 + 9 = 12$$

تمارين

أوجد قيمة التكامل الغير محدد للآتي:

1- $\int 8\,dx$
2- $\int -6\,dx$
3- $\int (3x + 2)\,dx$
4- $\int (x^3 - 4x)dx$
5- $\int (20x^3 + 12x^2 - 3)\,dx$

أوجد قيمة التكامل للآتي:

1- $\int_1^2 x^3 dx$
2- $\int_1^3 8\,dx$
3- $\int_0^2 x^2 dx$

المصطلحات العلمية

المصطلح باللغة العربية	المصطلح باللغة الإنجليزية
زاوية	Angle
مساحة	Area
محور	Axe
نظام المحاور الديكارتي	Cartesian Coordination System
دائرة	Circle
المخروط	Cone
مكعب	Cube
متوازي المستطيلات	Cuboid
أسطوانة	Cylinder
محدد	Determinant
التفاضل	Differentiation
معادلة	Equation
الدالة	Function
خط	Line
رياضيات	Mathematics
متوازي	Parallel
متوازي أضلاع	Parallelogram
عمودي	Perpendicular
كثيرات الحدود	Polynomial
مستطيل	Rectangle
مجموعة	Set
مدى	Range
جذر	Root
حجم	Size
ميل	Slope
مربع	Square
كرة	Sphere
شبة المنحرف	Trapezoid
مثلث	Triangle

المراجع

1. Hoboken, NJ, "**The Universal Book of Mathematics**", John Wiley, 2004.
2. Christopher Clapham, **"The Concise Oxford Dictionary of Mathematics", 3rd ed,** Oxford, UK: Oxford University Press, 2005.
3. John D. Berr**, "Dictionary of Mathematics"**, London: Fitzroy Dearborn, 1999.